

绵阳市高中 2018 级第二次诊断性考试

理科数学

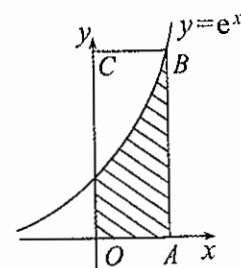
注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x \in \mathbf{N} | -1 \leq x \leq 1\}$, $B=\{x | \log_2 x < 1\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $[-1, 1)$
 - B. $(0, 1)$
 - C. $\{-1, 1\}$
 - D. $\{1\}$
2. 已知直线 $l_1: ax+2y+1=0$, 直线 $l_2: 2x+ay+1=0$, 若 $l_1 \perp l_2$, 则 $a =$
 - A. 0
 - B. 2
 - C. ± 2
 - D. 4
3. 已知平面向量 $a=(1, \sqrt{3})$, $b=(2, \lambda)$, 其中 $\lambda > 0$, 若 $|a-b|=2$, 则 $a \cdot b =$
 - A. 2
 - B. $2\sqrt{3}$
 - C. $4\sqrt{3}$
 - D. 8
4. 二项式 $(2x - \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中，常数项为
 - A. -60
 - B. -40
 - C. 60
 - D. 120
5. 已知函数 $f(x)=x^3+\sin x+2$, 若 $f(m)=3$, 则 $f(-m)=$
 - A. 2
 - B. 1
 - C. 0
 - D. -1

6. 已知曲线 $y=e^x$ (e 为自然对数的底数) 与 x 轴、 y 轴及直线 $x=a(a>0)$ 围成的封闭图形的面积为 e^a-1 . 现采用随机模拟的方法向右图中矩形 $OABC$ 内随机投入 400 个点，其中恰有 255 个点落在图中阴影部分内，若 $OA=1$, 则由此模拟实验可以估计出 e 的值约为
 - A. 2.718
 - B. 2.737
 - C. 2.759
 - D. 2.785



7. 已知命题 p : 若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是等差数列，则 $\{ra_n+sb_n\} (r, s \in \mathbf{R})$ 也是等差数列；命题 q : $\forall x \in (2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z})$, 都有 $\sin x < x$. 则下列命题是真命题的是
 - A. $\neg p \wedge q$
 - B. $p \wedge q$
 - C. $p \vee q$
 - D. $\neg p \vee q$
8. 对全班 45 名同学的数学成绩进行统计，得到平均数为 80，方差为 25，现发现数据收集时有两个错误，其中一个 95 分记录成了 75 分，另一个 60 分记录成了 80 分. 纠正数据后重新计算，得到平均数为 $\bar{x}$, 方差为 s^2 , 则
 - A. $\bar{x}=80, s^2<25$
 - B. $\bar{x}=80, s^2=25$
 - C. $\bar{x}=80, s^2>25$
 - D. $\bar{x}<80, s^2>25$
9. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , P 为其渐近线上一点，若 $\triangle PF_1F_2$ 是顶角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的等腰三角形，则 E 的离心率为
 - A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$
 - B. 2
 - C. $\sqrt{3}$
 - D. $\sqrt{5}$
10. 若函数 $f(x)=x^3 - (\frac{a}{2}+3)x^2 + 2ax + 3$ 在 $x=2$ 处取得极小值，则实数 a 的取值范围是
 - A. $(-\infty, -6)$
 - B. $(-\infty, 6)$
 - C. $(6, +\infty)$
 - D. $(-6, +\infty)$
11. 已知正实数 x, y 满足 $\ln \frac{x}{y} > \lg \frac{y}{x}$, 则
 - A. $\ln x > \ln(y+1)$
 - B. $\ln(x+1) < \lg y$
 - C. $3^x < 2^{y-1}$
 - D. $2^{x-y} > 1$
12. 已知点 O 为坐标原点， $|OP|=2\sqrt{2}$, 点 B , 点 C 为圆 $x^2+y^2=12$ 上的动点，且以 BC 为直径的圆过点 P , 则 $\triangle OBC$ 面积的最小值为
 - A. 2
 - B. 4
 - C. 6
 - D. $\sqrt{2}$

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$ ，则 $z=$ _____.

14. 已知某科技公司员工发表论文获奖的概率都为 p ，且各员工发表论文是否获奖相互独立. 若 X 为该公司的6名员工发表论文获奖的人数， $D(X)=0.96$ ， $E(X)>2$ ，则 p 为_____.

15. 已知 $F(1, 0)$ 为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$ 的右焦点，过 E 的下顶点 B 和 F 的直线与 E 的另一交点为 A ，若 $4\overrightarrow{BF} = 5\overrightarrow{FA}$ ，则 $a=$ _____.

16. 关于函数 $f(x) = \sin 2x + 2\cos^2 x$ ，下列说法正确的序号是_____.

①函数 $f(x)$ 的一条对称轴为 $x = \frac{3\pi}{8}$ ；②若 $f(x_1) = f(x_2) = 1$ ，则 $x_1 - x_2 = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ；

③函数 $f(x)$ 关于 $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ 成中心对称；

④设 $[a, b] \subseteq [0, \pi]$ ，对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$ ，若 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则有 $x_1 > x_2$ ，那么 $b-a$ 的最大值为 $\frac{3\pi}{8}$.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共60分.

17. (12分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ ， $a_{n+1}^2 = a_n(a_{n+1} + 2a_n)$.

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，并求通项公式；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_{2n} > \frac{160}{9}a_n$ ，求 n 的最小值.

18. (12分)

某食品厂2020年2月至6月的某款果味饮料生产产量(单位：万瓶)的数据如下表：

x (月份)	2	3	4	5	6
y (生产产量：万瓶)	3	5	6.5	8	10.5

(1) 根据以上数据，求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ；

(2) 当统计数据中，某月实际生产产量与所得回归方程预测的生产产量的误差在 $[-0.1, 0.1]$ 内时，称该月为“甲级月”，否则称该月为“乙级月”. 将所得回归方程预测的7月生产产量视作该月的实际生产产量，现从该年2月至7月中随机抽取2个月，求这2个月均为“乙级月”的概率.

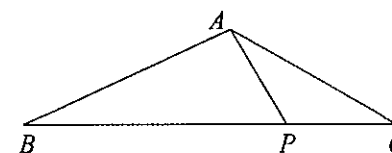
附：参考公式： $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

19. (12分)

如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 P 在边 BC 上， $\angle PAC = 30^\circ$ ， $AC = \sqrt{3}$ ， $AP + PC = 2$.

(1) 求 $\angle APC$ ；

(2) 若 $\cos B = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ ，求 $\triangle APB$ 的面积.



20. (12分)

已知函数 $f(x) = (2m+2)x - 4\ln x - \frac{1}{2}mx^2 (m \in \mathbb{R})$.

(1) 若函数 $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}mx^2$ 有两个零点，求 m 的取值范围；

(2) 若 $f(x) \geq 0$ ，求 m 的取值范围.

21. (12分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p>0)$ 的焦点为 F ，点 A 在第一象限内且为抛物线 C 上一点，点

$D(5, 0)$ ，当直线 AD 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$ 时， $\triangle ADF$ 恰为等边三角形.

(1) 求 C 的方程；

(2) 过 y 轴上一点 P 作抛物线 C 的切线 l_1 交直线 $x=5$ 于 G ，以 DG 为直径作圆 E ，过点 P 作直线 l_2 交圆 E 于 H, Q 两点，试问： $|PH| \cdot |PQ|$ 是否为定值？并说明理由.

(二) 选考题：共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题记分.

22. [选修4—4：坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 6$. 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = t^2 + \frac{1}{t^2}, \\ y = t^2 - \frac{1}{t^2} \end{cases}$

(t 为参数). 以坐标原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha (-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \rho \in \mathbb{R})$.

(1) 求曲线 C_1 与 C_2 的极坐标方程；

(2) 已知直线 l 与曲线 C_1 交于 A, B 两点，与曲线 C_2 交于点 C ，若 $|AB| : |OC| = \sqrt{5} : \sqrt{2}$ 求 α 的值.

23. [选修4—5：不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |x-3| + |x-2|$.

(1) 求不等式 $f(x) < 3$ 的解集；

(2) 记函数 $f(x)$ 的最小值为 m ， $a>0$ ， $b>0$ ， $c>0$ ， $a+b+c=mabc$ ，证明： $ab+bc+ac \geq 9$.