绵阳市高中2018级第二次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．

1—5 DADCB　6—10 CCCAB　11—12 DA

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．$-$i　　14．0.8　　15．3　　16．②④

三、解答题：本大题共6小题，共70分．

17．解：（1）证明：∵ $a_{n+1}^2=a_n(a_{n+1}+2a_n)$，

∴ $a_{n+1}^2-a_na_{n+1}-2a_n^2=(a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}+a_n)=0$．

又数列$\{a_n\}$各项均为正数，∴ $a_{n+1}+a_n>0$，

∴ $a_{n+1}-2a_n=0$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$．　…………………………………………4分

数列$\{a_n\}$是首项 $a_1=1$，公比为2的等比数列．

∴数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$．　…………………………………………6分

（2）∵ $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

∴$S_{2n}=2^{2n}-1$，　……………………………………………………… 8分

∵$S_{2n}>\dfrac{160}{9}a_n$，

∴ $9(2^{2n}-1)>80\times 2^n$，即 $(9\times 2^n+1)(2^n-9)>0$，

∴ $2^n-9>0$，又 $n\in N^*$，

∴正整数 n 的最小值为4．　…………………………………………12分

18．解：（1）由题意得，$\bar{x}=\dfrac{1}{5}\times(2+3+4+5+6)=4$，

$\bar{y}=\dfrac{1}{5}\times(3+5+6.5+8+10.5)=6.6$，　………………………2 分

$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=18$，$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=10$，　……………………………4 分

$\hat{b}=1.8$，$a=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=6.6-1.8\times 4=-0.6$，　…………………………5分

∴y关于x的线性回归方程 $\hat{y}=1.8x-0.6$．　……………………………6分

（2）由（1）所得回归方程计算2月至7月份预测生产量依次为

3，4.8，6.6，8.4，10.2，12．

可得，其中“甲级月”有3个，“乙级月”有3个．……………………… 9分

记6个月中随机抽取2个月均为“乙级月”为事件A，

$\therefore P(A)=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$．…………………………………………………12分

19．**解**：（1）在$\triangle APC$中，$\angle PAC=30^\circ$，$AC=\sqrt{3}$，

由余弦定理得$CP^2=AP^2+AC^2-2AP\times AC\times\cos\angle PAC$，

即$CP^2=AP^2+3-2\sqrt{3}AP\times\cos30^\circ$，…………………………………………2分

又$AP+CP=2$，

联立解得$AP=1$，$CP=1$．…………………………………………………4分

$\therefore\angle APC=120^\circ$．…………………………………………………………6分

（2）$\because\angle APC=120^\circ$，$\therefore\angle APB=60^\circ$．

$\because\cos B=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，

$\therefore\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$．……………………………………………………………8分

在$\triangle APB$中，由正弦定理$\dfrac{AB}{\sin\angle APB}=\dfrac{AP}{\sin B}$，

$\therefore AB=\sqrt{7}$．……………………………………………………………………10分

在$\triangle APB$中，由余弦定理$AB^2=AP^2+PB^2-2AP\cdot PB\cdot\cos\angle APB$，

得$7=1+PB^2-2PB\cos60^\circ$，即$PB^2-PB-6=0$，

解得$BP=3$．

$\therefore\triangle APB$的面积为$\dfrac{1}{2}AP\times BP\times\sin\angle APB=\dfrac{1}{2}\times1\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$．……………12分

20．**解**：（1）由$g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}mx^2=(2m+2)x-4\ln x$，$x>0$，

得$g'(x)=(2m+2)-\dfrac{4}{x}=\dfrac{(2m+2)x-4}{x}=2\cdot\dfrac{(m+1)x-2}{x}$．……………………………2分

①当$m\leqslant-1$时，$g'(x)=2\times\dfrac{(m+1)x-2}{x}\leqslant0$，

此时$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

$g(x)$在$(0,+\infty)$上不可能有两个零点，故$m\leqslant-1$不合题意．……………………4分

②当 $m>-1$ 时，$f(x)$在区间 $(0,\dfrac{2}{m+1})$ 上单调递减，

在区间 $(\dfrac{2}{m+1},+\infty)$ 上单调递增．　……………………………5 分

要使得函数 $g(x)$在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，

则 $g(\dfrac{2}{m+1})=4-4\ln\dfrac{2}{m+1}<0$，解得 $-1<m<\dfrac{2-e}{e}$．

综上，实数 m 的范围是 $-1<m<\dfrac{2-e}{e}$．　………………………………………6 分

（2） $f'(x)=(2m+2)-\dfrac{4}{x}-mx=-\dfrac{(mx-2)(x-2)}{x}$，$x>0$．

①当 $0<m<1$ 时，函数 $f(x)$在 $(2,\dfrac{2}{m})$ 上单调递增，

在(0，2)，$(\dfrac{2}{m},+\infty)$ 上单调递减，

当 $x>4+\dfrac{4}{m}$ 时，函数 $f(x)$在 $(\dfrac{2}{m},+\infty)$ 上单调递减．

∴ $f(x)=x(2m+2-\dfrac{1}{2}mx)-4\ln x<f(4+\dfrac{4}{m})<0$，

∴$f(x)\geqslant 0$，在 $x>0$ 恒成立不成立，即 $0<m<1$ 不合题意．　……………………8 分

②当 $m\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$在 $(\dfrac{2}{m},2)$ 上单调递增，

函数 $f(x)$在 $(0,\dfrac{2}{m})$，$(2,+\infty)$ 上单调递减，

当 $x>4+\dfrac{4}{m}>2$ 时，$f(x)$在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

∴ $f(x)=x(2m+2-\dfrac{1}{2}mx)-4\ln x<f(4+\dfrac{4}{m})<0$，

∴$f(x)\geqslant 0$ 在 $x>0$ 恒成立不成立，

即 $m\geqslant 1$ 不合题意．　………………………………………………………10 分

③当 $m\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$在(0，2)上单调递减, 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

∴要使得 $f(x)\geqslant 0$ 的充要条件是 $f(2)\geqslant 0$，

解得 $m\geqslant 2\ln2-2$，

∴$2\ln2-2\leqslant m\leqslant 0$．

综上所述，实数 m 的范围是[2ln2−2，0]．　……………………………………12 分

21．**解：**（1）由题意得 $x_A=\frac{1}{2}(5+\frac{p}{2})=\frac{5}{2}+\frac{p}{4}$，$|DF|=5-\frac{p}{2}$．……………………2 分

由抛物线的定义可知 $|AF|=x_A+\frac{p}{2}$，

则由 $|AF|=|DF|$，解得 $p=2$．

∴抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$．……………………………………………………5 分

（2）设直线 l_1 的方程为 $y=kx+m$，

则 $G(5,5k+m)$，$E(5,\frac{5k+m}{2})$，$P(0，m)$．

∴以 DG 为直径的圆 E：$(x-5)^2+(y-\frac{5k+m}{2})^2=\frac{(5k+m)^2}{4}$，

即 $(x-5)^2+y^2-(5k+m)y=0$．……………………………………………………7 分

联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $k^2x^2+(2km-4)x+m^2=0$．……………8 分

∵ l_1 与曲线 C 相切，

∴ $\Delta=(2km-4)^2-4k^2m^2=0$，

化简得 $km=1$．……………………………………………………………………9 分

设直线 l_2 与的方程为 $y=tx+m$，$H(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$．

联立 $\begin{cases}y=tx+m,\\ (x-5)^2+y^2-(5k+m)y=0,\end{cases}$

消去 y，整理得 $(t^2+1)x^2+(tm-5kt-10)x+25-5km=0$，

∴ $x_1\cdot x_2=\frac{25-5km}{t^2+1}=\frac{20}{t^2+1}$．……………………………………………………11 分

∵ $|PH|=\sqrt{t^2+1}|x_1|$，$|PQ|=\sqrt{t^2+1}|x_2|$，

∴ $|PH|\cdot|PQ|=(t^2+1)|x_1\cdot x_2|=(t^2+1)\cdot\frac{20}{t^2+1}=20$，

即 $|PH|\cdot|PQ|$ 为定值 20．……………………………………………………………12 分

22．**解：**（1）∵曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-2)^2+y^2=6$，

∴曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-2=0$．……………………………………4 分

将曲线 C_2 的参数方程消参得 $x^2-y^2=4(x\geqslant 2)$，

∴曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2\cos 2\theta=4(\rho\cos\theta\geqslant 2)$．…………………………5 分

（2）曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-2=0$，

将直线 l：$\theta=\alpha(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$，$\rho\in\mathbf{R}$ 代入上式，得 $\rho^2-4\cos\alpha-2=0$，

∴ $\rho_1+\rho_2=4\cos\alpha$，$\rho_1\rho_2=-2<0$． ……………………………………………7 分

设 $|OA|=|\rho_1|$，$|OB|=|\rho_2|$．∴ $|AB|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{16\cos^2\alpha+8}$．

∵曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2\cos2\theta=4(\rho\cos\theta\geqslant2)$，

设点 $C(\rho，\alpha)$，∴ $|OC|=\sqrt{\frac{4}{\cos2\alpha}}$．

∵ $\frac{|AB|}{|OC|}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$， ……………………………………………………………9 分

∴ $4\cos^2 2\alpha+8\cos2\alpha-5=0$，解得 $\cos2\alpha=\frac{1}{2}$．

∵ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，

∴ $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 或 $\alpha=-\frac{\pi}{6}$． ……………………………………………………10 分

23．**解**：（1）当 $x\geqslant3$ 时，$f(x)=x-3+x-2=2x-5$．

由 $f(x)<3$，得 $x<4$，综合得 $3\leqslant x<4$．

当 $2<x<3$ 时，$f(x)=3-x+x-2=1$．

由 $f(x)<3$，得 $1<3$ 恒成立，综合得 $2<x<3$．

当 $x\leqslant2$ 时，$f(x)=3-x+2-x=5-2x$．

由 $f(x)<3$，得 $x>1$，综合得 $1<x\leqslant2$．

综上，不等式 $f(x)<3$ 的解集为 $(1，4)$． …………………………………………5 分

（2）证明：∵ $f(x)=|x-3|+|x-2|\geqslant|(x-3)-(x-2)|=1$，

(当且仅当 $2\leqslant x\leqslant3$ 时，取“=”)

∴函数 $f(x)$ 的最小值为 1，即 $m=1$．∴ $ab+bc+ac=abc$．

∴ $ab+bc+ac=\frac{ab+bc+ac}{abc}\times(a+b+c)=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\cdot(a+b+c)$

$$=3+(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})\geqslant3+2+2+2=9.$$

(当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”)

∴ $ab+bc+ca\geqslant9$． ……………………………………………………………10 分