

绵阳市高中 2019 级第二次诊断性考试
文科数学

注意事项：

- 1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 1. 设集合 $A=\{(x, y)|y=x\}$, $B=\{(x, y)|y=x^2\}$, 则集合 $A\cap B$ 的元素个数为
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 2. 下列函数既是奇函数又是增函数的是
A. $y=\sin x$ B. $y=2^x$ C. $y=\log_2 x$ D. $y=x^3$
- 3. 已知角 α 的终边过点 $A(1, \sqrt{3})$, 则 $\sin\alpha+\tan\alpha=$
A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{3+2\sqrt{3}}{6}$
- 4. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的焦距为 4, 两条渐近线互相垂直, 则 E 的方程为
A. $x^2-y^2=1$ B. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ D. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$
- 5. 如图, 茎叶图记录了甲、乙两个家庭连续 9 个月的月用电量(单位: 度), 根据茎叶图, 下列说法正确的是
A. 甲家庭用电量的中位数为 33
B. 乙家庭用电量的极差为 46
C. 甲家庭用电量的方差小于乙家庭用电量的方差
D. 甲家庭用电量的平均值高于乙家庭用电量的平均值
- 6. 过点 $P(1, 2)$, 且与原点距离最大的直线的方程为
A. $2x-y=0$ B. $x+2y-5=0$ C. $x-2y+3=0$ D. $2x+y-4=0$

甲		乙
2	1	1
5 4 3	2	3
3 2 7	3	4 8 9
1	4	0 2
0	5	1 6

- 7. 已知平面向量 a, b 不共线, $\overrightarrow{AB}=4a+6b$, $\overrightarrow{BC}=-a+3b$, $\overrightarrow{CD}=a+3b$, 则
A. A, B, D 三点共线 B. A, B, C 三点共线
C. B, C, D 三点共线 D. A, C, D 三点共线
- 8. 已知直线 $x+y-1=0$ 与圆 $C: (x-2)^2+(y-1)^2=m$ 相交于 A, B 两点, 若 $AB=2\sqrt{3}$, 则 $m=$
A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. 3 D. 4
- 9. 第 24 届冬季奥林匹克运动会将于 2022 年在北京举办. 为了解某城市居民对冰雪运动的关注情况, 随机抽取了该市 100 人进行调查统计, 得到如下 2×2 列联表:
下列说法正确的是
参考公式:
$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$
其中 $n=a+b+c+d$.
附表:

$P(K^2\geq k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

A. 有 99% 以上的把握认为 “关注冰雪运动与性别有关”
B. 有 99% 以上的把握认为 “关注冰雪运动与性别无关”
C. 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为 “关注冰雪运动与性别无关”
D. 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为 “关注冰雪运动与性别有关”
- 10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则
A. $f(-1)<f(-2^{0.1})<f(\log_2 5)$ B. $f(\log_2 5)<f(-1)<f(-2^{0.1})$
C. $f(\log_2 5)<f(-2^{0.1})<f(-1)$ D. $f(-2^{0.1})<f(-1)<f(\log_2 5)$
- 11. 若 $x=2$ 是函数 $f(x)=x^2+2(a-2)x-4a\ln x$ 的极大值点, 则实数 a 的取值范围是
A. $(-\infty, -2)$ B. $(-2, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$
- 12. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点, E 上存在两点 A, B 使得梯形 AF_1F_2B 的高为 $\sqrt{2}c$ (其中 c 为半焦距), 且 $\overrightarrow{AF_1}=3\overrightarrow{BF_2}$, 则 E 的离心率为
A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 i 是虚数单位，若复数 z 满足 $z \cdot i = z + 6i$ ，则复数 z 的虚部为_____.

14. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 1, \\ \log_2 x, & x < 1, \end{cases}$ 则 $f(f(2)) =$ _____.

15. 已知 A, B 为抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上的两点, $M(-1, 2)$, 若 $\overline{AM} = \overline{MB}$, 则直线 AB 的方程为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \sin|x| - \sqrt{3}\cos x$, 若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 在 $[-2\pi, \frac{4\pi}{3}]$ 上有三个不同的实根, 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为公差大于 0 的等差数列, $a_2 \cdot a_3 = 15$, 且 a_1, a_4, a_{25} 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_m = \frac{20}{41}$, 求 m 的值.

18. (12 分)

某通讯商场推出一款新手机, 分为甲、乙、丙、丁 4 种不同的配置型号. 该店对近期售出的 100 部该款手机的情况进行了统计, 绘制如下表格:

配置	甲	乙	丙	丁
频数	25	40	15	20

每售出一部甲、乙、丙、丁配置型号的手机可分别获得利润 600 元、400 元、500 元、450 元.

(1) 根据以上 100 名消费者的购机情况, 计算该商场销售一部手机的平均利润;

(2) 某位消费者随机购买了 2 部不同配置型号的该款手机, 且购买的该款手机的四种型号是等可能的, 求商场通过这两部手机获得的利润不低于 1000 元的概率.

19. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a\sin A - c\sin C = (\sqrt{3}a - b)\sin B$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $\sin A \cdot \sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + 1 - ax^2$ ($a \in \mathbf{R}$)

(1) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有且只有一个零点, 求实数 a 的取值范围.

21. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 A, B 分别为右顶点和上顶点,

点 O 为坐标原点, $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{e}{|FA|}$, $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 其中 e 为 E 的离心率.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 过点 O 异于坐标轴的直线与 E 交于 M, N 两点, 射线 AM, AN 分别与圆 $C:$

$x^2 + y^2 = 4$ 交于 P, Q 两点, 记直线 MN 和直线 PQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 问 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定

值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \sin \alpha + 2 \cos \alpha, \\ y = 1 + \cos \alpha - 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数). 以

坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立的极坐标系中, 直线 l 的方程是 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$.

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2) 若点 A 的坐标为 $(2, 0)$, 直线 l 与曲线 C 交于 P, Q 两点, 求 $\frac{1}{|AP|} + \frac{1}{|AQ|}$ 的值.

23. [选修 4—5：不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{2x-1} - |x+m| - m$.

(1) 当 $m = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 M , 当 $m > -\frac{1}{2}$ 时, $[-m, \frac{1}{2}] \subseteq M$, 求实数 m 的取值范围.