绵阳市高中 2019 级第二次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．

CDABC　　BDBAC　　AD

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．-3　　14．-2　　15．$x+2y-3=0$　　16．$[-\sqrt{3},0)$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．

17．解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为$d(d>0)$．

由题意得$\begin{cases}(a_1+d)(a_1+2d)=15,\\(a_1+3d)^2=a_1(a_1+24d),\end{cases}$

解得$a_1=1$，$d=2$，…………………………………………………………4 分

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$．

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2n-1$．………………………………………6 分

（2）由（1）知，$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$，……………8 分

$\therefore S_n=\dfrac{1}{2}[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\cdots+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})]$

$=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{n}{2n+1}$．…………………………………………10 分

$\because S_m=\dfrac{20}{41}$，$\therefore S_m=\dfrac{m}{2m+1}=\dfrac{20}{41}$，解得$m=20$．

$\therefore m$的值为 20．……………………………………………………………12 分

18．解：（1）由题意得，每售出一部该手机为甲、乙、丙、丁配置

型号的频率分别为$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{20}$，$\dfrac{1}{5}$．…………………………………………4 分

$\therefore$该商场销售一部该款手机的平均利润为

$600\times\dfrac{1}{4}+400\times\dfrac{2}{5}+500\times\dfrac{3}{20}+450\times\dfrac{1}{5}=475$ 元．…………………………6 分

（2）由题意得，该消费者购买的两部手机的型号可能是

甲乙，甲丙，甲丁，乙丙，乙丁，丙丁．…………………………………8 分

这两部手机获得的利润不低于 1000 元的情况为：甲乙，甲丙，甲丁．

$\therefore$这两部手机获得的利润不低于 1000 元的概率为$P=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$．……………12 分

19．**解**：（1）由 $a\sin A-c\sin C=(\sqrt{3}a-b)\sin B$，得 $a^2-c^2=\sqrt{3}ab-b^2$， ……………………2 分

$\therefore \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ……………………………………………………………………4 分

又 $C\in(0,\ \pi)$ ，$\therefore C=\dfrac{\pi}{6}$． ……………………………………………………6 分

（2）由正弦定理，得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=4$，

$\therefore a=4\sin A,\ b=4\sin B$． ……………………………………………………………8 分

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=8\times\sin A\times\sin B\times\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$． ………………………………12 分

20．**解**：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=\ln x+1-2x^2$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-4x=\dfrac{1-4x^2}{x}=\dfrac{(1-2x)(1+2x)}{x}$ $(x>0)$． ……………………………2 分

由 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{2}$；由 $f'(x)<0$，解得 $x>\dfrac{1}{2}$．

$\therefore$函数 $f(x)$的单调递增区间为 $(0,\dfrac{1}{2})$，单调递减区间为 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$． ……………………5 分

（2）由题意得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax=\dfrac{1-2ax^2}{x}$ $(x>0)$． ………………………………6 分

①当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增．

又 $x\to 0$ 时，$f(x)\to -\infty$，$f(1)=1-a>0$，

$\therefore$函数 $f(x)$只有一个零点． ……………………………………………………………8 分

②当 $a>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax=\dfrac{1-2ax^2}{x}=\dfrac{(1-\sqrt{2a}x)(1+\sqrt{2a}x)}{x}$．

由 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$；

由 $f'(x)<0$，解得 $x>\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$．

$\therefore$函数 $f(x)$在 $(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}})$ 上的单调递增，在 $(\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty)$ 上的单调递减． ……………10 分

$\because$函数 $f(x)$有且只有一个零点，

$\therefore f(\dfrac{1}{\sqrt{2a}})=0$，解得 $a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$．

综上，实数 a 取值范围 $a\leqslant 0$ 或 $a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$． ……………………………………………12 分

21．解：（1）$\because \frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{e}{|FA|}$， $\therefore \frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{e}{a-c}$．

$\because S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}ab=\sqrt{2}$， $e=\frac{c}{a}$， $a^2=b^2+c^2$

$\therefore$联立解得 $a=2$，$b=\sqrt{2}$．

$\therefore$椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．……………………………………………………………5 分

（2）设点 $M(x_0，y_0)$， $P(x_1，y_1)$， $Q(x_2，y_2)$，则点 $N(-x_0,-y_0)$．

由题意得 $A(2，0)$.

$\because$点 M，N 在椭圆 E 上，

$\therefore \frac{x_0^{\ 2}}{4}+\frac{y_0^{\ 2}}{2}=1$， $\therefore \frac{y_0}{x_0-2}\cdot\frac{-y_0}{-x_0-2}=-\frac{1}{2}$，

即 $k_{AM}\cdot k_{AN}=-\frac{1}{2}$． ……………………………………………………………………7 分

设直线 AM 的方程为 $x=my+2$ ，则直线 AN 的方程为 $x=-\frac{2}{m}y+2$．

联立 $\begin{cases} x=my+2, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 消 x 整理得 $(m^2+2)y^2+4my=0$．

由点 A，M 均在 E 上，$\therefore y_0=-\frac{4m}{m^2+2}$． $\therefore x_0=my_0+2=\frac{4-2m^2}{m^2+2}$，

$\therefore k_1=\frac{y_0}{x_0}=\frac{2m}{m^2-2}$． ……………………………………………………………………10 分

联立 $\begin{cases} x=my+2, \\ x^2+y^2=4, \end{cases}$ 消 x 整理得 $(m^2+1)y^2+4my=0$．

由点 A，P 均在 C 上，$\therefore y_1=-\frac{4m}{m^2+1}$， $\therefore x_1=my_1+2=\frac{2-2m^2}{m^2+1}$．

同理： $y_2=\frac{8m}{m^2+4}$， $x_2=\frac{2m^2-8}{m^2+4}$．

$\therefore k_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{m(3m^2+6)}{m^4-4}=\frac{3m}{m^2-2}$．

$\therefore \frac{k_1}{k_2}=\frac{2m}{m^2-2}\cdot\frac{m^2-2}{3m}=\frac{2}{3}$ ，

即 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值. ……………………………………………………………………12 分

22．**解**：（1）由 $(x-2)^2=(\sin\alpha+2\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha$，

$(y-1)^2=(\cos\alpha-2\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+4\sin^2\alpha$

两式相加可得曲线 C 的普通方程即 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$．……………………………3 分

直线 l 的极坐标方程 $\rho\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{3}-\rho\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=1$，

∵ $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

∴直线 l 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-2=0$．…………………………………………5 分

（2）由（1）可知直线 l 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$，且点 $A(2，0)$在直线 l 上，

∴直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\dfrac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)．…………………………………………7 分

代入曲线 C 的普通方程可得 $t^2-t-4=0$．

令交点 P，Q 两点的参数分别为 t_1，t_2，

则有 $t_1+t_2=1$，$t_1t_2=-4$，

∴ $\dfrac{1}{|AP|}+\dfrac{1}{|AQ|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1\cdot t_2|}=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1\cdot t_2}}{|t_1\cdot t_2|}=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$．………10 分

23．**解**：（1）由题意可得 $|2x-1|-|x+2|-2\geqslant 0$，

令函数 $g(x)=|2x-1|-|x+2|$．

当 $x\leqslant -2$，$g(x)=1-2x-(-x-2)=3-x\geqslant 2$，解得 $x\leqslant -2$；

当 $-2<x<\dfrac{1}{2}$，$g(x)=1-2x-(x+2)=-1-3x\geqslant 2$，解得 $-2<x\leq -1$；

当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$，$g(x)=2x-1-(x+2)=-3+x\geqslant 2$，解得 $x\geqslant 5$．

综上，$x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 5$．

∴函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$．…………………………………………5 分

（2）由题意可得当 $m>-\dfrac{1}{2}$ 时，不等式 $|2x-1|-|x+m|-m\geqslant 0$ 在 $x\in[-m,\dfrac{1}{2}]$ 内恒成立，

∴ $1-2x-x-m-m\geqslant 0$，即 $2m\leqslant -3x+1$ 在 $x\in[-m,\dfrac{1}{2}]$ 内恒成立，

解得 $m\leqslant -\dfrac{1}{4}$．

综上，$-\dfrac{1}{2}<m\leqslant -\dfrac{1}{4}$．……………………………………………………10 分