绵阳市高中2019级第二次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．

CACBB　　DCBAD　　AD

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．-3　　14．36　　15．$x+2y-3=0$　　16．①③④

三、解答题：本大题共6小题，共70分．

17．解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为$d(d>0)$．

由题意得$\begin{cases}(a_1+d)(a_1+2d)=15,\\(a_1+3d)^2=a_1(a_1+24d),\end{cases}$

解得$a_1=1$，$d=2$，……………………………………………………………4分

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$．

∴数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2n-1$．………………………………………………6分

（2）由（1）知，$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$，……………8分

$\therefore S_n=\dfrac{1}{2}[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\cdots+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})]$

$=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{n}{2n+1}$．……………………………………………………10分

$\because S_m=\dfrac{20}{41}$，$\therefore S_m=\dfrac{m}{2m+1}=\dfrac{20}{41}$，解得$m=20$．

∴m的值为20．……………………………………………………………………12分

18．解：（1）由题意得，每售出一部该款手机为甲、乙、丙、丁配置型号的频率分别为$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{20}$，$\dfrac{1}{5}$．……………………………………………………………………3分

∴该商场销售一部该款手机的平均利润为

$600\times\dfrac{1}{4}+400\times\dfrac{2}{5}+500\times\dfrac{3}{20}+450\times\dfrac{1}{5}=475$元．……………………………5分

（2）由题意得 $X\sim B(4,\ \frac{1}{4})$．

$P(X=0)=C_4^0\times(\frac{1}{4})^0\times(\frac{3}{4})^4=\frac{81}{256}$； $P(X=1)=C_4^1\times(\frac{1}{4})^1\times(\frac{3}{4})^3=\frac{108}{256}$；

$P(X=2)=C_4^2\times(\frac{1}{4})^2\times(\frac{3}{4})^2=\frac{54}{256}$； $P(X=3)=C_4^3\times(\frac{1}{4})^3\times(\frac{3}{4})^1=\frac{12}{256}$；

$P(X=4)=C_4^4\times(\frac{1}{4})^4\times(\frac{3}{4})^0=\frac{1}{256}$． ……………………………………………………10 分

X 的概率分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

∴X 的期望 $E(X)=4\times\frac{1}{4}=1$．………………………………………………………………12 分

19．**解**：（1）∵ $(a-\sin C)\cos B=\sin B\cdot\cos C$，

∴ $a\cdot\cos B=\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C=\sin(B+C)=\sin A$，

即 $a\cos B=\sin A$，

∴ $\frac{a}{\sin A}=\frac{1}{\cos B}$．………………………………………………………………………3 分

∵ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$， $b=\sqrt{3}$， ∴ $\frac{1}{\cos B}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}$，

∴ $\sin B-\sqrt{3}\cos B=0$，即 $\tan B=\sqrt{3}$． ……………………………………………5 分

∵ $B\in(0,\ \pi)$，

∴ $B=\frac{\pi}{3}$． ……………………………………………………………………………6 分

（2）由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=2$，

得 $a=2\sin A,\ c=2\sin C$．…………………………………………………………………7 分

$\triangle ABC$ 的周长$=\sqrt{3}+2\sin A+2\sin C=\sqrt{3}+2\sin A+2\sin(\frac{2\pi}{3}-A)$

$$=\sqrt{3}+2\sin A+2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A)=\sqrt{3}+3\sin A+\sqrt{3}\cos A$$

$$=\sqrt{3}+2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A)=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin(A+\frac{\pi}{6})$$．………………………10 分

∵ $A\in(0,\ \pi)$， ∴ $A+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$， ∴ $\sin(A+\frac{\pi}{6})\in(\frac{1}{2},1]$．

∴$\triangle ABC$ 的周长的取值范围为$(2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}]$． ……………………………………12 分

20．**解**：（1）由题意得 $f'(x)=(x-1)e^x+x-1=(x-1)(e^x+1)$．

当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$．

∴函数 $f(x)$在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

∴函数 $f(x)$的极小值为 $f(1)=-\mathrm{e}-\dfrac{1}{2}$，无极大值. ……………………………………………5 分

（2）由题意得 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-2ax-1<0$ 对任意的 $x\in[-2,1]$ 恒成立.

令 $h(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-2ax-1$．当 $x\in[-2,1]$ 时，$h_{\max}(x)<0$．

令 $\varphi(x)=h'(x)=x\mathrm{e}^x-2a$，则 $\varphi'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，

易知 $\varphi(x)$ 在区间 $(-2,-1)$ 上单调递减，在区间 $(-1,1)$ 上单调递增.

当 $x\in[-2,1]$ 时，$\varphi_{\min}(-1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-2a$，$\varphi(-2)=-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}-2a$，$\varphi_{\max}(1)=\mathrm{e}-2a$．……7 分

①当 $\varphi_{\max}(1)=e-2a\leqslant 0$，即 $a\geqslant\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，

$h'(x)\leqslant 0$，$h(x)$ 在 $[-2,1]$ 上单调递减，∴ $h_{\max}(x)=\mathrm{h}(-2)=-\dfrac{3}{\mathrm{e}^2}+4a-1<0$，

得 $a<\dfrac{3+\mathrm{e}^2}{4\mathrm{e}^2}$，而 $\dfrac{3+\mathrm{e}^2}{4\mathrm{e}^2}<\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，∴此时无解. ……………………………………………8 分

②当 $\varphi_{\min}(-1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-2a\geqslant 0$，即 $a\leqslant-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$ 在 $[-2,1]$ 上单调递增，

∴ $h_{\max}(x)=\mathrm{h}(1)=-2a-1<0$，得 $a>-\dfrac{1}{2}$，∴ $-\dfrac{1}{2}<a\leqslant-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$．

③当 $\begin{cases}\varphi(-2)\leqslant 0,\\ \varphi(1)>0,\end{cases}$ 即 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\leqslant a<\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，存在 $x_0\in(-1,1)$，使得 $\varphi(x_0)=0$，

则 $h(x)$ 在 $(-2,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增.

∴ $\begin{cases}h(-2)<0,\\ h(1)<0,\end{cases}$，又 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\leqslant a<\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，∴ $-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\leqslant a<\dfrac{3+\mathrm{e}^2}{4\mathrm{e}^2}$．

④当 $\begin{cases}\varphi(-2)>0,\\ \varphi(-1)<0,\end{cases}$ 即 $-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}<a<-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ 时，

存在 $-2<x_1<-1<x_2<1$，使得 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$．

则 $h(x)$ 在 $(-2,x_1)$ 上递增，在 (x_1,x_2) 上递减，在 $(x_2,1)$ 上递增.

∴ $\begin{cases}h(x_1)<0,\\ h(1)=-2a-1<0,\end{cases}$ 而 $h(x_1)=(x_1-1)\mathrm{e}^{x_1}-2a\mathrm{e}^{x_1}-1=(x_1-1)\mathrm{e}^{x_1}-{x_1}^2\mathrm{e}^{x_1}-1<0$ 恒成立，

∴ $-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}<a<-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$． ……………………………………………………………………11 分

综上，实数 a 的取值范围为 $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3+\mathrm{e}^2}{4\mathrm{e}^2}$． ……………………………………………12 分

21．解：（1）$\because \dfrac{1}{|OF|}+\dfrac{1}{|OA|}=\dfrac{e}{|FA|}$，

$\therefore \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{e}{a-c}$.

$\because S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}ab=\sqrt{2}$， $e=\dfrac{c}{a}$， $a^2=b^2+c^2$

∴联立解得 $a=2$，$b=\sqrt{2}$.

∴椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………5 分

（2）设点 $M(x_0,\ y_0)$， $P(x_1,\ y_1)$， $Q(x_2,\ y_2)$，则点 $N(-x_0,-y_0)$.

由题意得 $A(2,\ 0)$.

∵点 M，N 在椭圆 E 上，

$\therefore \dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{2}=1$， $\therefore \dfrac{y_0}{x_0-2}\cdot\dfrac{-y_0}{-x_0-2}=-\dfrac{1}{2}$，

即 $k_{AM}\cdot k_{AN}=-\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………………7 分

设直线 AM 的方程为 $x=my+2$ ，则直线 AN 的方程为 $x=-\dfrac{2}{m}y+2$.

联立 $\begin{cases} x=my+2, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 消 x 整理得 $(m^2+2)y^2+4my=0$.

由点 A，M 均在 E 上，$\therefore y_0=-\dfrac{4m}{m^2+2}$. $\therefore x_0=my_0+2=\dfrac{4-2m^2}{m^2+2}$，

$\therefore k_1=\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{2m}{m^2-2}$. ………………………………………………………………10 分

联立 $\begin{cases} x=my+2, \\ x^2+y^2=4, \end{cases}$ 消 x 整理得 $(m^2+1)y^2+4my=0$.

由点 A，P 均在 C 上，$\therefore y_1=-\dfrac{4m}{m^2+1}$， $\therefore x_1=my_1+2=\dfrac{2-2m^2}{m^2+1}$.

同理： $y_2=\dfrac{8m}{m^2+4}$， $x_2=\dfrac{2m^2-8}{m^2+4}$.

$\therefore k_2=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{m(3m^2+6)}{m^4-4}=\dfrac{3m}{m^2-2}$.

$\therefore \dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{2m}{m^2-2}\cdot\dfrac{m^2-2}{3m}=\dfrac{2}{3}$ ，即 $\dfrac{k_1}{k_2}$ 为定值. ……………………………12 分

22．**解**：（1）由 $(x-2)^2=(\sin\alpha+2\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha$，

$(y-1)^2=(\cos\alpha-2\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+4\sin^2\alpha$

两式相加可得曲线 C 的普通方程即 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$． ……………………………3 分

直线 l 的极坐标方程 $\rho\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{3}-\rho\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=1$，

$\because$ $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

$\therefore$直线 l 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-2=0$． ……………………………………5 分

（2）由（1）可知直线 l 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$，且点 $A(2，0)$在直线 l 上，

$\therefore$直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\dfrac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)． ………………………………………7 分

代入曲线 C 的普通方程可得 $t^2-t-4=0$．

令交点 P，Q 两点的参数分别为 t_1，t_2，

则有 $t_1+t_2=1$，$t_1t_2=-4$，

$\therefore \dfrac{1}{|AP|}+\dfrac{1}{|AQ|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1|\cdot|t_2|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1\cdot t_2|}=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1\cdot t_2}}{|t_1\cdot t_2|}=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$． ………10 分

23．**解**：（1）由题意可得 $|2x-1|-|x+2|-2\geqslant 0$，

令函数 $g(x)=|2x-1|-|x+2|$．

当 $x\leqslant -2$，$g(x)=1-2x-(-x-2)=3-x\geqslant 2$，解得 $x\leqslant -2$；

当 $-2<x<\dfrac{1}{2}$，$g(x)=1-2x-(x+2)=-1-3x\geqslant 2$，解得 $-2<x\leq -1$；

当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$，$g(x)=2x-1-(x+2)=-3+x\geqslant 2$，解得 $x\geqslant 5$．

综上，$x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 5$．

$\therefore$函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$． ……………………………………5 分

（2）由题意可得当 $m>-\dfrac{1}{2}$ 时，不等式 $|2x-1|-|x+m|-m\geqslant 0$ 在 $x\in[-m,\dfrac{1}{2}]$ 内恒成立，

$\therefore 1-2x-x-m-m\geqslant 0$，即 $2m\leqslant -3x+1$ 在 $x\in[-m,\dfrac{1}{2}]$ 内恒成立，

解得 $m\leqslant -\dfrac{1}{4}$．

综上，$-\dfrac{1}{2}<m\leqslant -\dfrac{1}{4}$． ……………………………………………………………10 分