

成都市 2019 级高中毕业班第二次诊断性检测

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)2 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

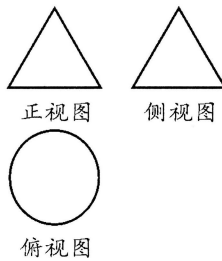
注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $i$  为虚数单位,则  $i^3(1+i)=$   
(A)  $1+i$  (B)  $1-i$  (C)  $-1+i$  (D)  $-1-i$
2. 设集合  $A=\{x \in \mathbf{N}^* | x < 3\}$ . 若集合  $B$  满足  $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ , 则满足条件的集合  $B$  的个数为  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
3. 如图是一个几何体的三视图,其中正视图与侧视图都是边长为 2 的等边三角形,俯视图是直径为 2 的圆. 则该几何体的表面积为  
(A)  $3\pi$  (B)  $2\pi$  (C)  $\sqrt{3}\pi$  (D)  $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$
4.  $(1-2x)^6$  的展开式中  $x^3$  的系数为  
(A)  $-160$  (B)  $160$  (C)  $-80$  (D)  $80$
5. 在区间  $(-2, 4)$  内随机取一个数  $x$ , 使得不等式  $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 < 0$  成立的概率为  
(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{3}{4}$
6. 设经过点  $F(1, 0)$  的直线与抛物线  $y^2 = 4x$  相交于  $A, B$  两点. 若线段  $AB$  中点的横坐标为 2, 则  $|AB| =$   
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7



7. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $a_1 = \frac{1}{4}$ ,  $S_{n+1} = S_n + a_n + \frac{1}{2}$ , 则  $S_{20} =$   
(A) 10 (B) 20 (C) 100 (D) 400
8. 若曲线  $y = \ln x + x^2 + 1$  在点  $(1, 2)$  处的切线与直线  $ax + y - 1 = 0$  平行, 则实数  $a$  的值为  
(A)  $-4$  (B)  $-3$  (C) 4 (D) 3
9. 在等比数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 > 0$ , 则“ $a_2 > a_3$ ”是“ $a_3 > a_6$ ”的  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
10. 在不考虑空气阻力的条件下, 火箭的最大速度  $v$  (单位: km/s) 与燃料的质量  $M$  (单位: kg), 火箭(除燃料外)的质量  $m$  (单位: kg) 的函数关系是  $v = 2000 \ln(1 + \frac{M}{m})$ . 当燃料质量与火箭质量的比值为  $t_0$  时, 火箭的最大速度可达到  $v_0$  km/s. 若要使火箭的最大速度达到  $2v_0$  km/s, 则燃料质量与火箭质量的比值应为  
(A)  $2t_0^2$  (B)  $t_0^2 + t_0$  (C)  $2t_0$  (D)  $t_0^2 + 2t_0$
11. 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 已知底面  $ABCD$  为矩形,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PA = 6$ ,  $AB = 1$ ,  $AD = \sqrt{3}$ . 若  $E, F$  分别为  $AB, PD$  的中点, 经过  $C, E, F$  三点的平面与侧棱  $PA$  相交于点  $G$ . 若四棱锥  $G-ABCD$  的顶点均在球  $O$  的表面上, 则球  $O$  的半径为  
(A)  $\frac{5}{4}$  (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{13}}{2}$  (D) 2
12. 已知  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若  $c = 1$ ,  $4a^2 \cos^2 B + 4b^2 \sin^2 A = 3b^2 - 3$ , 则  $\tan A$  的最大值为  
(A)  $\frac{\sqrt{7}}{4}$  (B)  $\frac{\sqrt{7}}{3}$  (C)  $\frac{3\sqrt{7}}{7}$  (D)  $\frac{4\sqrt{7}}{7}$

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上。

13. 某区域有大型城市 18 个, 中型城市 12 个, 小型城市 6 个. 为了解该区域城市空气质量情况, 现采用分层抽样的方法抽取 6 个城市进行调查, 则应抽取的大型城市的个数为\_\_\_\_\_.
14. 已知  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $BC = 2$ ,  $D$  为  $AC$  边上的动点, 则  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} =$ \_\_\_\_\_.
15. 定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(2-x)$ , 且当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = x^2$ . 则函数  $g(x) = f(x) - (\frac{x-2}{10})^3$  的所有零点之和为\_\_\_\_\_.
16. 已知  $F_2$  为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点, 经过  $F_2$  作直线  $l$  与双曲线的一条渐近线垂直, 垂足为  $A$ , 直线  $l$  与双曲线的另一条渐近线相交于点  $B$ . 若  $|AF_2| = \frac{1}{3} |BF_2|$ , 则双曲线的离心率为\_\_\_\_\_.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

某中学为研究课外阅读时长对语文成绩的影响,随机调查了 50 名学生某阶段每人每天课外阅读的平均时长(单位:分钟)及他们的语文成绩,得到如下的统计表:

| 平均时长(单位:分钟) | (0,20] | (20,40] | (40,60] | (60,80] |
|-------------|--------|---------|---------|---------|
| 人数          | 9      | 21      | 15      | 5       |
| 语文成绩优秀人数    | 3      | 9       | 10      | 3       |

(I)估算该阶段这 50 名学生每天课外阅读平均时长的平均数(同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);

(II)若从课外阅读平均时长在区间(0,20]和(60,80]的学生中各随机选取 2 名进行研究,求所选 4 名学生中至少有 3 名语文成绩优秀的学生的概率.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + \sin^2 \omega x$ , 其中  $0 < \omega < 6$ , 且  $f(\frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}$ .

(I)求函数  $f(x)$  的单调递增区间;

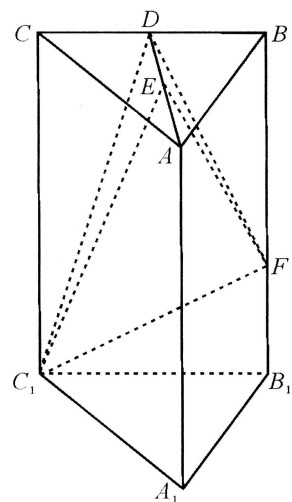
(II)若  $\theta \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6})$ , 且  $f(\theta) = \frac{5}{6}$ , 求  $\sin 2\theta$  的值.

19. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,已知  $AA_1 \perp$  底面  $A_1B_1C_1$ ,  $AA_1 = 3$ ,  $AB = AC$ ,  $BC = 2$ ,  $D$  为  $BC$  的中点,点  $F$  在棱  $BB_1$  上,且  $BF = 2$ ,  $E$  为线段  $AD$  上的动点.

(I)证明:  $C_1F \perp EF$ ;

(II)若直线  $C_1D$  与  $EF$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{10}}{6}$ , 求二面角  $E-FC_1-D$  的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  经过点  $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ , 其右顶点为  $A(2, 0)$ .

(I)求椭圆  $C$  的方程;

(II)若点  $P, Q$  在椭圆  $C$  上, 且满足直线  $AP$  与  $AQ$  的斜率之积为  $\frac{1}{20}$ . 求  $\triangle APQ$  面积的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ax^2 - 2ax$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ .

(I)若函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 求  $a$  的取值范围;

(II)若函数  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 当  $x_1 + x_2 \in [3\ln 2 - 4, \frac{5-3e}{e-1}]$  时, 求  $\frac{x_2+2}{x_1+2}$  的取值范围.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分)选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的方程为  $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$ . 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线  $l$  的极坐标方程为  $\theta = \alpha (\rho \in \mathbf{R})$ , 其中  $\alpha$  为常数且  $\alpha \in [0, \pi)$ .

(I)求直线  $l$  的普通方程与曲线  $C$  的极坐标方程;

(II)若直线  $l$  与曲线  $C$  相交于  $A, B$  两点, 求  $\frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|}$  的取值范围.

23. (本小题满分 10 分)选修 4-5: 不等式选讲

已知函数  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4ax + a^2} - |2x - 3a|$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(I)当  $a = 1$  时, 求函数  $f(x)$  的最大值;

(II)若对  $\forall m, n \in (0, +\infty)$ , 关于  $x$  的不等式  $f(x) < \frac{1}{m} + \frac{1}{n+2}$  恒成立, 当  $m+n=6$  时, 求  $a$  的取值范围.