

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题, 共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分, 共 60 分)

1. B; 2. D; 3. A; 4. A; 5. B; 6. C; 7. C; 8. B; 9. A; 10. D; 11. B; 12. C.

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分, 共 20 分)

13. 3;

14. 4;

15. 18;

16. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $\sqrt{3}$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) 调查的 50 名学生某阶段每人每天课外阅读平均时长的频率分布表如下:

平均时长(单位:分钟)	(0,20]	(20,40]	(40,60]	(60,80]
频率	0.18	0.42	0.3	0.1

.....2 分

 $\therefore$ 该阶段这 50 名学生每天课外阅读平均时长的平均数的估计值为

$$10 \times 0.18 + 30 \times 0.42 + 50 \times 0.3 + 70 \times 0.1 = 36.4.$$

.....5 分

(II) 由题意可知课外阅读平均时长在区间 (0,20] 的有 9 名, (60,80] 的有 5 名, 其中语文成绩优秀的学生各有 3 名.

 $\therefore$ 从课外阅读平均时长在区间 (0,20] 和 (60,80] 的学生中各随机选取 2 名的情况种数

$$m = C_3^2 C_3^2 = 360.$$

.....7 分

又所选 4 名学生中有 3 名语文成绩优秀的学生的情况种数

$$n_1 = C_3^2 C_3^1 C_2^1 + C_3^1 C_6^1 C_3^2 = 18 + 54 = 72;$$

.....9 分

有 4 名语文成绩优秀的学生的情况种数 $n_2 = C_3^2 C_3^2 = 9$.

.....11 分

 $\therefore$ 所选 4 名学生中至少有 3 名语文成绩优秀的学生的概率 $P = \frac{n_1 + n_2}{m} = \frac{81}{360} = \frac{9}{40}$.

.....12 分

$$18. \text{解: (I) 由题意得 } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + \frac{1 - \cos 2\omega x}{2} = \sin(2\omega x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}.$$

.....2 分

$$\because f(\frac{\pi}{12}) = \sin(\omega \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \therefore \sin(\frac{\omega\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = 0.$$

$$\therefore \frac{\omega\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

.....3 分

$$\therefore \omega = 6k + 1.$$

$$\text{又 } 0 < \omega < 6, \therefore k = 0, \omega = 1.$$

$$\therefore f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{由题意得 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的单调递增区间为 } [-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi], k \in \mathbf{Z}. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{(II) 由(I)有 } f(\theta) = \sin(2\theta - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}, \text{ 得 } \sin(2\theta - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because \theta \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}), \therefore 2\theta - \frac{\pi}{6} \in (0, \frac{\pi}{6}).$$

$$\therefore \cos(2\theta - \frac{\pi}{6}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \sin 2\theta = \sin[(2\theta - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2\theta - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} \cos(2\theta - \frac{\pi}{6}) \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (I) 在矩形 BCC_1B_1 中, $\because BC=2, BB_1=3, BF=2, D$ 为 BC 的中点,

可得 $C_1F=DF=\sqrt{5}, C_1D=\sqrt{10}$.

$$\because C_1F^2 + DF^2 = C_1D^2, \therefore C_1F \perp DF. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$\because AB=AC, D$ 为 BC 的中点, $\therefore AD \perp BC$.

由题意有 $BB_1 \perp$ 平面 ABC . 又 $BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , $\therefore$ 平面 $ABC \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

$\because$ 平面 $ABC \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = BC, AD \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore AD \perp$ 平面 BCC_1B_12 分

$\because C_1F \subset$ 平面 $BCC_1B_1, \therefore C_1F \perp AD$3 分

又 $AD \cap DF = D, AD, DF \subset$ 平面 DEF ,

$\therefore C_1F \perp$ 平面 DEF4 分

又 $\because EF \subset$ 平面 $DEF, \therefore C_1F \perp EF$5 分

(II) 如图, 取 B_1C_1 的中点 O , 连接 OA_1, OD , 易知 OC_1, OA_1, OD 两两互相垂直.

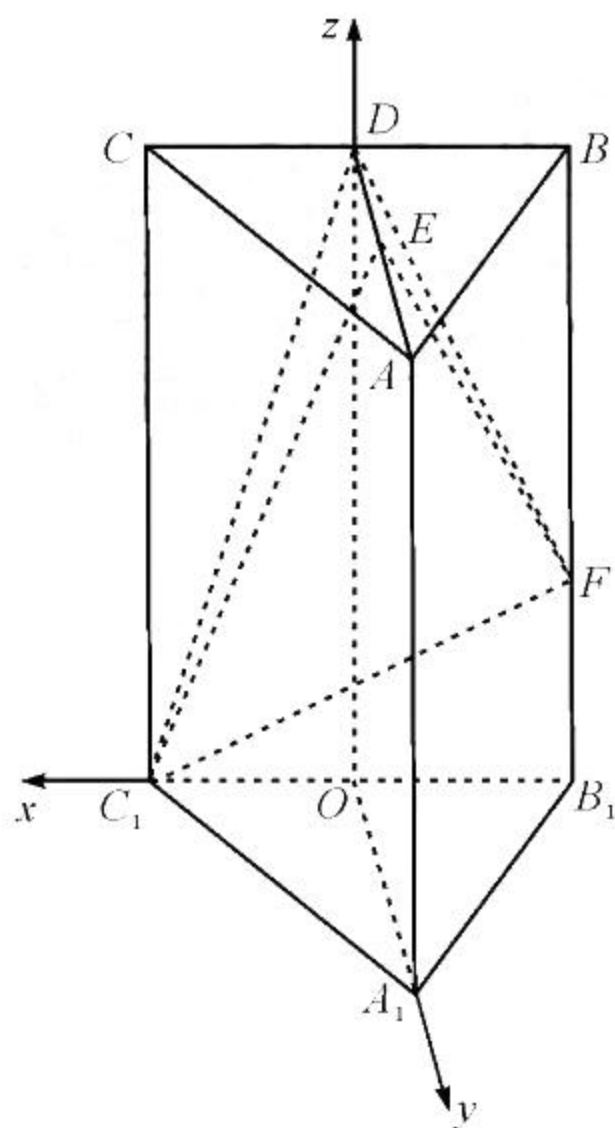
以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OC_1}, \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OD}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.

则 $O(0,0,0), C_1(1,0,0), D(0,0,3), F(-1,0,1)$.

设 $E(0,t,3)$, 其中 $t>0$6 分

$$\therefore \overrightarrow{C_1D} = (-1,0,3), \overrightarrow{EF} = (-1,-t,-2).$$

$\therefore$ 直线 C_1D 与 EF 所成角的余弦值为



$$\left| \frac{\overrightarrow{C_1D} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{C_1D}| |\overrightarrow{EF}|} \right| = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{t^2+5}} = \frac{\sqrt{10}}{6}, \text{解得 } t=2. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \overrightarrow{C_1E} = (-1, 2, 3), \overrightarrow{C_1F} = (-2, 0, 1).$$

易得平面 DFC_1 的一个法向量 $m = (0, 1, 0)$.

设平面 EFC_1 的一个法向量为 $n = (x_1, y_1, z_1)$.

$$\text{由 } \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{C_1E} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{C_1F} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -x_1 + 2y_1 + 3z_1 = 0, \\ -2x_1 + z_1 = 0. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y_1 = -\frac{5}{2}x_1, \\ z_1 = 2x_1. \end{cases}$$

$$\text{令 } x_1 = 1, \text{ 得 } n = (1, -\frac{5}{2}, 2). \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}. \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

由题意知二面角 $E-FC_1-D$ 为锐二面角.

$$\therefore \text{二面角 } E-FC_1-D \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{5}}{3}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$20. \text{解: (I) 由已知得 } a=2, \therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{将点 } (\sqrt{3}, \frac{1}{2}) \text{ 代入椭圆 } C \text{ 的方程, 得 } \frac{3}{4} + \frac{1}{4b^2} = 1. \text{ 解得 } b=1. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 由题意知直线 PQ 的斜率存在. 设直线 PQ 的方程为 $y = kx + m$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } (4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore \Delta = 64k^2m^2 - 4(4k^2 + 1)(4m^2 - 4) = 16(4k^2 - m^2 + 1) > 0.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{4m^2 - 4}{4k^2 + 1}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore y_1y_2 &= (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 \\ &= \frac{k^2(4m^2 - 4)}{4k^2 + 1} - \frac{8k^2m^2}{4k^2 + 1} + m^2 = \frac{m^2 - 4k^2}{4k^2 + 1}. \end{aligned}$$

$$\therefore k_{AP} \cdot k_{AQ} = \frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{y_1y_2}{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{\frac{m^2 - 4k^2}{4k^2 + 1}}{\frac{4m^2 - 4}{4k^2 + 1} + \frac{16km}{4k^2 + 1} + 4} = \frac{1}{20}.$$

$\dots\dots 7 \text{ 分}$

化简得 $\frac{m^2 - 4k^2}{4m^2 + 16km + 16k^2} = \frac{1}{20}$, 即 $m^2 - km - 6k^2 = 0$.

$$\therefore (m+2k)(m-3k) = 0.$$

.....8 分

$\because$ 直线 PQ 不能经过点 A, $\therefore m+2k \neq 0$, $\therefore m-3k=0$.

$\therefore$ 直线 PQ 的方程为 $y=k(x+3)$.

$\therefore$ 直线 PQ 经过定点 $(-3, 0)$, 设此定点为 D.

.....9 分

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle APQ} &= |S_{\triangle APD} - S_{\triangle AQD}| = \frac{1}{2} |AD| |y_1 - y_2| = \frac{5}{2} |y_1 - y_2| = \frac{5|k|}{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{5|k|}{2} \cdot \frac{4\sqrt{4k^2 - m^2 + 1}}{4k^2 + 1} = \frac{10\sqrt{k^2(1-5k^2)}}{4k^2 + 1}. \end{aligned}$$

.....10 分

由 $\Delta = 16(4k^2 - m^2 + 1) = 16(1 - 5k^2) > 0$, 得 $0 < k^2 < \frac{1}{5}$.

令 $t = 4k^2 + 1$, 则 $t \in (1, \frac{9}{5})$.

$$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{-5t^2 + 14t - 9}{t^2}} = \frac{5}{2} \sqrt{-9(\frac{1}{t} - \frac{7}{9})^2 + \frac{4}{9}}.$$

.....11 分

$\therefore$ 当 $\frac{1}{t} = \frac{7}{9}$, 即 $k^2 = \frac{1}{14}$ 时, $\triangle APQ$ 面积取得最大值 $\frac{5}{3}$.

.....12 分

21. 解: (I) 由题意知 $f'(x) = e^x - ax - 2a \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立.

即 $a \leq \frac{e^x}{x+2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立.

.....2 分

令 $g(x) = \frac{e^x}{x+2}$, 则 $g'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$.

$\because x \in [0, +\infty)$, $\therefore g'(x) > 0$ 恒成立, $\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\therefore g(x)_{\text{最小值}} = g(0) = \frac{1}{2}.$$

.....4 分

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

.....5 分

(II) $\because f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , $\therefore f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

$$\therefore e^{x_1} = a(x_1 + 2), e^{x_2} = a(x_2 + 2).$$

由 (I) 得 $-2 < x_1 < -1 < x_2$, $a \in (\frac{1}{e}, +\infty)$.

$$\therefore e^{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + 2}{x_1 + 2}.$$

.....6 分

令 $t = \frac{x_2 + 2}{x_1 + 2}$, 则 $t \in (1, +\infty)$.

$$\therefore e^{(t-1)(x_1+2)} = t, \therefore (t-1)(x_1+2) = \ln t.$$

$$\therefore x_1 + 2 = \frac{\ln t}{t-1}, \therefore x_2 + 2 = \frac{t \ln t}{t-1}.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{(t+1)\ln t}{t-1} - 4.$$

.....8 分

$$\text{令 } h(t) = \frac{(t+1)\ln t}{t-1} - 4, \text{ 则 } h'(t) = \frac{t - 2\ln t - \frac{1}{t}}{(t-1)^2}.$$

$$\text{令 } \varphi(t) = t - 2\ln t - \frac{1}{t}, \text{ 则 } \varphi'(t) = 1 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} = \frac{(t-1)^2}{t^2} > 0.$$

$\therefore \varphi(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

又 $\varphi(1) = 0, \therefore \varphi(t) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

$\therefore h'(t) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

$\therefore h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

.....10 分

$$\text{又 } h(2) = 3\ln 2 - 4, h(e) = \frac{5-3e}{e-1},$$

.....11 分

$$\therefore \text{当 } h(t) \in [3\ln 2 - 4, \frac{5-3e}{e-1}] \text{ 时, } t \in [2, e].$$

$$\therefore \frac{x_2 + 2}{x_1 + 2} \text{ 的取值范围为 } [2, e].$$

.....12 分

22. 解: (I) 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 此时直线 l 的普通方程为 $x = 0$;

.....1 分

$$\text{当 } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ 时, 此时直线 } l \text{ 的普通方程为 } y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x = \tan \alpha \cdot x.$$

.....2 分

又曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$,

由极坐标与直角坐标的互化关系 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$,

得曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2\sqrt{3}\rho \sin \theta + 3 = 0$,

$$\text{即 } \rho^2 - 4\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) + 3 = 0.$$

.....4 分

(II) $\because$ 直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, $\therefore \alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.

.....5 分

将直线 l 的极坐标方程代入曲线 C 的极坐标方程, 得 $\rho^2 - 4\rho \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) + 3 = 0$.

设该方程的两根分别为 ρ_1 和 ρ_2 .

$$\text{则 } \rho_1 + \rho_2 = 4\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}), \rho_1 \rho_2 = 3.$$

.....6 分

由题意知 $|OA| = \rho_1, |OB| = \rho_2$.

$$\therefore \frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{4}{3} \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}).$$

.....8 分

$$\because \alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}), \therefore \alpha + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}).$$

$$\therefore \sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|} \text{ 的取值范围为 } (\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}]. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 解: (I) 当 $a=1$ 时, $f(x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - |2x - 3| = |2x + 1| - |2x - 3|$.

$$\text{当 } x < -\frac{1}{2} \text{ 时, } f(x) = -2x - 1 + 2x - 3 = -4; \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{当 } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \text{ 时, } f(x) = 2x + 1 + 2x - 3 = 4x - 2 \in [-4, 4]; \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x > \frac{3}{2} \text{ 时, } f(x) = 2x + 1 - 2x + 3 = 4. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

综上, 函数 $f(x)$ 的最大值为 4. \dots\dots 4 \text{ 分}

$$(II) \text{ 由题意, 有 } f(x)_{\text{最大值}} < (\frac{1}{m} + \frac{1}{n+2})_{\text{最小值}}. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\because f(x) = \sqrt{4x^2 + 4ax + a^2} - |2x - 3a| = |2x + a| - |2x - 3a| \leq |(2x + a) - (2x - 3a)| \\ = 4|a|,$$

$$\therefore f(x)_{\text{最大值}} = 4|a|. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

又 $m, n \in (0, +\infty), m + n = 6$,

$$\therefore \frac{1}{m} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{8} (\frac{1}{m} + \frac{1}{n+2}) [m + (n+2)] \geq \frac{1}{8} (1+1)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore (\frac{1}{m} + \frac{1}{n+2})_{\text{最小值}} = \frac{1}{2}. \text{ 此时 } \begin{cases} m = n + 2, \\ m + n = 6 \end{cases} \text{ 即 } m = 4, n = 2. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore 4|a| < \frac{1}{2}, \text{ 即 } |a| < \frac{1}{8}.$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围为 } (-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}). \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$