

2022 年普通高等学校招生全国统一考试 (北京卷)

数 学

本试卷共 5 页, 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

(1) 已知全集 $U = \{x | -3 < x < 3\}$, 集合 $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$, 则 $\complement_U A =$

(A) $(-2, 1]$

(B) $(-3, -2) \cup [1, 3)$

(C) $[-2, 1)$

(D) $(-3, -2] \cup (1, 3)$

(2) 若复数 z 满足 $i \cdot z = 3 - 4i$, 则 $|z| =$

(A) 1

(B) 5

(C) 7

(D) 25

(3) 若直线 $2x + y - 1 = 0$ 是圆 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 的一条对称轴, 则 $a =$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) -1

(4) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+2^x}$, 则对任意实数 x , 有

(A) $f(-x) + f(x) = 0$

(B) $f(-x) - f(x) = 0$

(C) $f(-x) + f(x) = 1$

(D) $f(-x) - f(x) = \frac{1}{3}$

(5) 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, 则

(A) $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$ 上单调递减

(B) $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12})$ 上单调递增

(C) $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递减

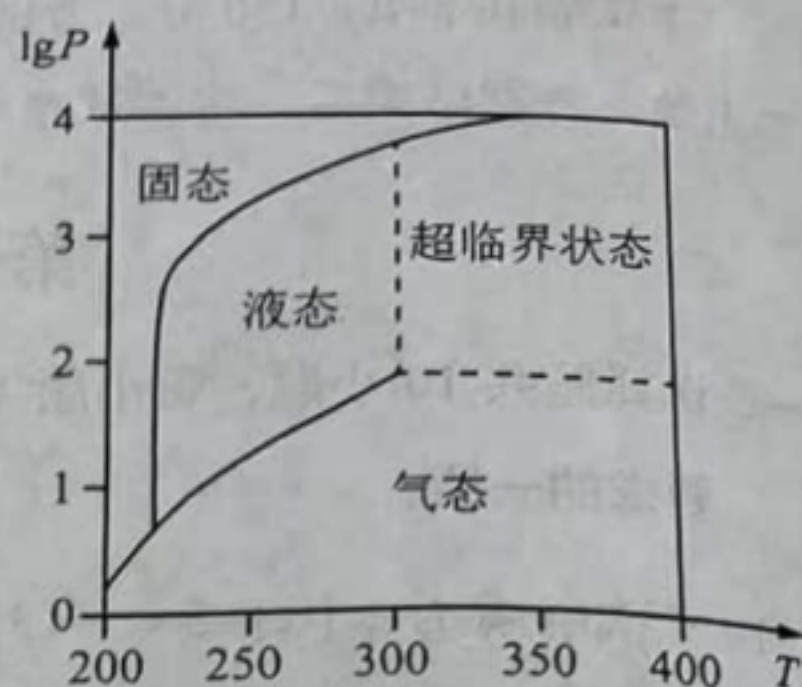
(D) $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12})$ 上单调递增



(6) 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的无穷等差数列, 则 “ $\{a_n\}$ 为递增数列” 是 “存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件
(B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既不充分也不必要条件

(7) 在北京冬奥会上, 国家速滑馆 “冰丝带” 使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术, 为实现绿色冬奥作出了贡献. 如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系, 其中 T 表示温度, 单位是 K; P 表示压强, 单位是 bar. 下列结论中正确的是



- (A) 当 $T = 220$, $P = 1026$ 时, 二氧化碳处于液态
(B) 当 $T = 270$, $P = 128$ 时, 二氧化碳处于气态
(C) 当 $T = 300$, $P = 9987$ 时, 二氧化碳处于超临界状态
(D) 当 $T = 360$, $P = 729$ 时, 二氧化碳处于超临界状态

(8) 若 $(2x-1)^4 = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 =$

- (A) 40
(B) 41
(C) -40
(D) -41

(9) 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6, S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合. 设集合 $T = \{Q \in S \mid PQ \leq 5\}$, 则 T 表示的区域的面积为

- (A) $\frac{3\pi}{4}$
(B) π
(C) 2π
(D) 3π

(10) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle C = 90^\circ$. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且 $PC = 1$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是

- (A) $[-5, 3]$
(B) $[-3, 5]$
(C) $[-6, 4]$
(D) $[-4, 6]$



第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是_____。

(12) 已知双曲线 $y^2 + \frac{x^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 则 $m =$ _____。

(13) 若函数 $f(x) = A \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $A =$ _____; $f(\frac{\pi}{12}) =$ _____。

(14) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值, 则 a 的一个取值为_____; a 的

最大值为_____。

(15) 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $a_n \cdot S_n = 9$ ($n=1, 2, \dots$)。给出下列四个结论:

① $\{a_n\}$ 的第 2 项小于 3;

② $\{a_n\}$ 为等比数列;

③ $\{a_n\}$ 为递减数列;

④ $\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项。

其中所有正确结论的序号是_____。



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中， $\sin 2C = \sqrt{3} \sin C$ 。

(I) 求 $\angle C$ ；

(II) 若 $b=6$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

(17) (本小题 14 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 为正方形，平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 ， $AB=BC=2$ ， M, N 分别为 A_1B_1, AC 的中点。

(I) 求证： $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ；

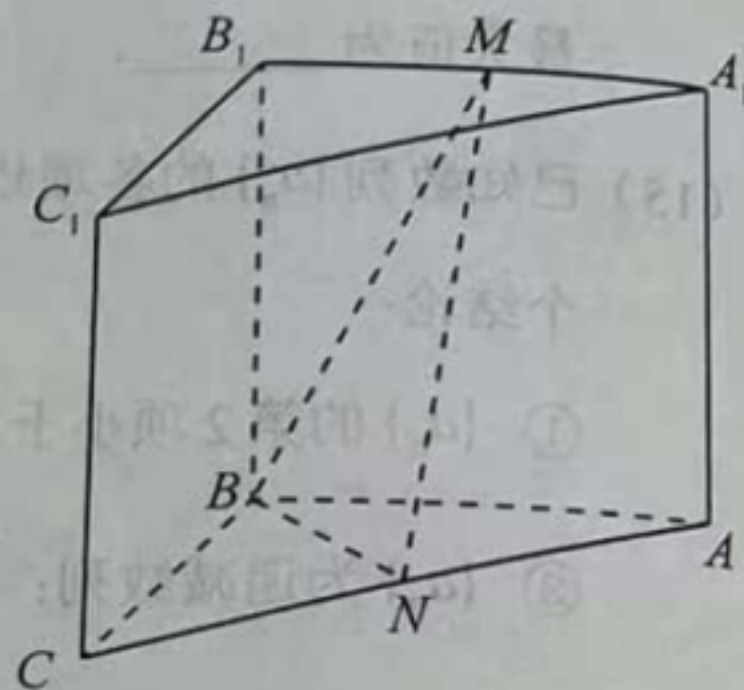
(II) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，

求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值。

条件①： $AB \perp MN$ ；

条件②： $BM = MN$ 。

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分。



(18) (本小题 13 分)

在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到 9.50 m 以上（含 9.50 m）的同学将获得优秀奖。为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据（单位：m）：

甲：9.80，9.70，9.55，9.54，9.48，9.42，9.40，9.35，9.30，9.25；

乙：9.78，9.56，9.51，9.36，9.32，9.23；

丙：9.85，9.65，9.20，9.16。

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立。

(I) 估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

(II) 设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计 X 的数学期望 EX ；

(III) 在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证明）

数学（北京卷）第 4 页（共 5 页）



扫描全能王 创建

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个顶点为 $A(0, 1)$, 焦距为 $2\sqrt{3}$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 过点 $P(-2, 1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B, C , 直线 AB, AC 分别与 x 轴交于点 M, N . 当 $|MN| = 2$ 时, 求 k 的值.

(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = e^x \ln(1+x)$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 设 $g(x) = f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性;

(III) 证明: 对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$, 有 $f(s+t) > f(s) + f(t)$.

(21) (本小题 15 分)

已知 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为有穷整数数列. 给定正整数 m , 若对任意的 $n \in \{1, 2, \dots, m\}$, 在 Q 中存在 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+j}$ ($j \geq 0$), 使得 $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+j} = n$, 则称 Q 为 m -连续可表数列.

(I) 判断 $Q: 2, 1, 4$ 是否为 5-连续可表数列? 是否为 6-连续可表数列? 说明理由;

(II) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 8-连续可表数列, 求证: k 的最小值为 4;

(III) 若 $Q: a_1, a_2, \dots, a_k$ 为 20-连续可表数列, 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k < 20$, 求证: $k \geq 7$.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

