

成都市 2020 级高中毕业班摸底测试

数学(文科)参考答案及评分意见

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. A; 2. B; 3. D; 4. B; 5. A; 6. C; 7. C; 8. B; 9. B; 10. C; 11. D; 12. C.

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. 4; 14. -1; 15. $\frac{16}{3}$; 16. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) $f'(x) = -x^2 + 2x + a - 1$2 分

∵函数 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线与 x 轴平行,

∴ $f'(0) = a - 1 = 0$. 解得 $a = 1$4 分

此时 $f(0) = -1 \neq 0$, 满足题意.

∴ $a = 1$5 分

(II) 由 (I) 得 $f'(x) = -x^2 + 2x = -x(x - 2)$.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = 2$7 分

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	单调递减 ↘	-1	单调递增 ↗	$\frac{1}{3}$	单调递减 ↘

.....11 分

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$; 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$.

.....12 分

18. 解:(I) 根据分层抽样的定义, 有

A 类工程有 $120 \times \frac{5}{12} = 50$;1 分

B 类工程有 $120 \times \frac{5}{12} = 50$;2 分

C 类工程有 $120 \times \frac{2}{12} = 20$3 分

∴A, B, C 三类工程项目的个数可能是 50, 50, 20.4 分

(II) 易知在 B 类工程抽样的这 5 个项目中,

被确定为“验收合格”的项目有 3 个, 所得评估分数分别为 85, 91, 92;5 分

被确定为“有待整改”的项目有 2 个, 所得评估分数分别为 82, 74.6 分

记选出的 2 个项目中既有“验收合格”项目,又有“有待整改”项目为事件 M .

在 B 类工程的 5 个项目中随机抽取 2 个项目的评估分数数据组合有 $\{85,91\}, \{85,92\}, \{91,92\}, \{85,82\}, \{85,74\}, \{91,82\}, \{91,74\}, \{92,82\}, \{92,74\}, \{82,74\}$, 共计 10 种结果.9 分

抽取的 2 个项目中既有“验收合格”项目,又有“有待整改”项目的评估分数数据组合有 $\{85,82\}, \{85,74\}, \{91,82\}, \{91,74\}, \{92,82\}, \{92,74\}$, 共计 6 种结果.11 分

故所求概率为 $P(M) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$12 分

19. 解:(I)由题意有 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PA$1 分

$\because E$ 为 AC 的中点, $\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$2 分

又 $PC = 3PD$, $\therefore$ 点 D 到平面 ABC 的距离为 $\frac{2}{3} PA$3 分

$\therefore V_{B-AED} = V_{D-ABE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} \times \frac{2}{3} PA = \frac{1}{9} S_{\triangle ABC} \cdot PA$4 分

$$\therefore \frac{V_{P-ABC}}{V_{B-AED}} = \frac{\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PA}{\frac{1}{9} S_{\triangle ABC} \cdot PA} = 3.$$

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 与三棱锥 $B-AED$ 的体积之比为 3 : 1.5 分

(II) $\because PA \perp$ 平面 $ABC, AB \subset$ 平面 $ABC, \therefore PA \perp AB$.

$\because \angle BAC = 90^\circ, \therefore AC \perp AB$.

$\because PA \cap AC = A, PA, AC \subset$ 平面 $PAC, \therefore AB \perp$ 平面 PAC .

又 $PC \subset$ 平面 $PAC, \therefore PC \perp AB$7 分

在 $Rt\triangle PAC$ 中, 由 $PA = 2, AC = 2\sqrt{2}$, 得 $PC = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$8 分

又 $PC = 3PD$, 得 $PD = \frac{1}{3} PC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$\therefore \frac{PD}{PA} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \frac{PD}{PA} = \frac{PA}{PC}.$$

又 $\angle APD = \angle CPA, \therefore \triangle PDA \sim \triangle PAC$10 分

$\therefore \angle PDA = 90^\circ$, 即 $PC \perp AD$11 分

又 $AD \cap AB = A, AD, AB \subset$ 平面 ABD ,

$\therefore PC \perp$ 平面 ABD12 分

20. 解:(I)由 $\angle OHF_2 = 30^\circ$, 得 $b = \sqrt{3}c$ (c 为半焦距),1 分

$\because$ 点 $(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 E 上, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$2 分

又 $a^2 = b^2 + c^2$, 解得 $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$.

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

(II) 由(I)知 $F_2(1,0)$. 设直线 $l: x=my+1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{由} \begin{cases} x=my+1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{消去 } x, \text{得} (3m^2+4)y^2 + 6my - 9 = 0.$$

$$\text{显然 } \Delta = 144(m^2+1) > 0. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2+4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2+4}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore my_1 y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2). \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{由 } P(-2,0), Q(2,0), \text{得直线 } AP \text{ 的斜率 } k_1 = \frac{y_1}{x_1+2}, \text{直线 } BQ \text{ 的斜率为 } k_2 = \frac{y_2}{x_2-2}.$$

$$\text{又 } |k_1| = \frac{|OM|}{|OP|}, |k_2| = \frac{|ON|}{|OQ|}, |OP| = |OQ| = 2, \therefore \frac{|OM|}{|ON|} = \frac{|k_1|}{|k_2|}.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle NPQ}} = \frac{\frac{1}{2}|PQ| \cdot |OM|}{\frac{1}{2}|PQ| \cdot |ON|} = \frac{|OM|}{|ON|} = \frac{|k_1|}{|k_2|}. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{k_1}{k_2} &= \frac{y_1(x_2-2)}{(x_1+2)y_2} = \frac{y_1(my_2-1)}{(my_1+3)y_2} = \frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2} = \frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2} = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle NPQ}} = \frac{1}{3}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (I) $f'(x) = x - \sin x$. \dots\dots 1 \text{ 分}

令 $h(x) = f'(x)$, 则 $h'(x) = 1 - \cos x$. \dots\dots 2 \text{ 分}

$\because \cos x \in [-1, 1], \therefore h'(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数. \dots\dots 4 \text{ 分}

$\because x \geq 0, \therefore f'(x) \geq f'(0) = 0 - \sin 0 = 0$. \dots\dots 5 \text{ 分}

$\therefore f'(x) \geq 0$. \dots\dots 5 \text{ 分}

$$(II) F'(x) = af'(x) + g'(x) = a(x - \sin x) + \frac{2(x - \sin x)}{e^x} = (x - \sin x)(a + \frac{2}{e^x}).$$

由(I)知 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, 有 $f'(x) < f'(0) = 0$, 即 $x - \sin x < 0$;

当 $x > 0$ 时, 有 $f'(x) > f'(0) = 0$, 即 $x - \sin x > 0$. \dots\dots 7 \text{ 分}

当 $a < 0$ 时, 由 $F'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = \ln(-\frac{2}{a})$, 且 $y = a + \frac{2}{e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

\dots\dots 8 \text{ 分}

① 当 $-2 < a < 0$ 时, $x_2 > 0$.

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, 有 $F'(x) < 0$; 当 $0 < x < x_2$ 时, 有 $F'(x) > 0$; 当 $x > x_2$ 时, 有 $F'(x) < 0$,

$\therefore$ 函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 在 $(0, x_2)$ 上为增函数, 在 $(x_2, +\infty)$ 上为减函数.

$\therefore$ 满足 0 为函数 $F(x)$ 的极小值点; \dots\dots 9 \text{ 分}

② 当 $a = -2$ 时, $x_2 = 0$.

$\therefore$ 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, 有 $F'(x) \leq 0$ 恒成立, 故函数 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.

$\therefore$ 函数 $F(x)$ 不存在极小值点, 不符合题意; \dots\dots 10 \text{ 分}

③当 $a < -2$ 时, $x_2 < 0$.

$\because$ 当 $x < x_2$ 时, 有 $F'(x) < 0$; 当 $x_2 < x < 0$ 时, 有 $F'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时, 有 $F'(x) < 0$,

$\therefore$ 函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, x_2)$ 上为减函数, 在 $(x_2, 0)$ 上为增函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

$\therefore 0$ 为函数 $F(x)$ 的极大值点, 不符合题意.11 分

综上所述, 若 0 为函数 $F(x)$ 的极小值点, 则 a 的取值范围为 $(-2, 0)$12 分

22. 解: (I) 由 $O_1(1, \frac{\pi}{2})$, $\angle MOO_1 = \frac{\pi}{6}$, 得点 M 的极角为 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$2 分

在等腰 $\triangle O_1MO$ 中, 由正弦定理得 $\frac{|O_1M|}{\sin \angle MOO_1} = \frac{|OM|}{\sin \angle MO_1O}$,

$$\text{即 } \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{|OM|}{\sin \frac{2\pi}{3}}.$$

$$\therefore |OM| = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \quad \text{.....4 分}$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的极坐标为 } (\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}). \quad \text{.....5 分}$$

(II) 由题意, 在直角坐标系中, 点 M 在以 $(0, 1)$ 为圆心, 1 为半径的半圆弧 C_1 上,

其参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数, 且 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$).7 分

设线段 MO_2 的中点 N 的坐标为 (x, y) .

已知点 $M(\cos \theta, 1 + \sin \theta)$, $O_2(0, -1)$, 由中点坐标公式可得

$$\begin{cases} x = \frac{0 + \cos \theta}{2} = \frac{1}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{-1 + 1 + \sin \theta}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta. \end{cases} \quad \text{.....9 分}$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 的轨迹方程为 } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{1}{2} \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数, 且 } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}). \quad \text{.....10 分}$$