

成都市 2020 级高中毕业班摸底测试

数 学(理科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

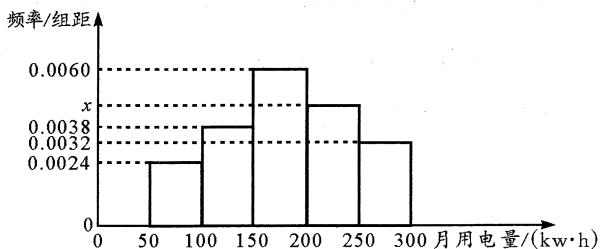
1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbb{N} | -1 < x \leq 2\}$, $B = \{x | |x| \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$
(A) $\{0, 1\}$ (B) $\{x | -1 < x \leq 1\}$ (C) $\{0, 1, 2\}$ (D) $\{x | 0 < x \leq 1\}$
2. 复数 $z = \frac{1-i}{i} + 2i$ (i 为虚数单位)在复平面内对应的点位于
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq x, \\ x + y \geq 1, \\ 2x - y \leq 2. \end{cases}$ 则 $z = 2x + y$ 的最大值为
(A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) 4 (D) 6
4. 设 $a = \ln \frac{1}{3}$, $b = (\frac{1}{2})^{0.3}$, $c = \log_2 3$, 则 a, b, c 的大小关系为
(A) $b < a < c$ (B) $a < b < c$ (C) $a < c < b$ (D) $c < b < a$

5. 从某小区随机抽取 100 户居民用户进行月用电量调查,发现他们的月用电量都在 50~300 $\text{kw} \cdot \text{h}$ 之间,适当分组(每组为左闭右开区间)后绘制成如图所示的频率分布直方图。则直方图中 x 的值以及在被调查的用户中月用电量落在区间 $[100, 250)$ 内的户数分别为



- (A) 0.0046, 72 (B) 0.0046, 70 (C) 0.0042, 72 (D) 0.0042, 70

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0. \end{cases}$ 若 $f(f(-1)) = 4$, 且 $a > -1$, 则 $a =$

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) 1 (D) 2

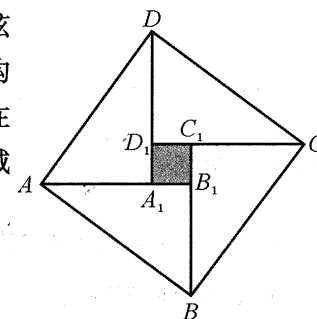
7. 已知焦距为 4 的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线与直线 $x - \sqrt{3}y = 0$ 垂直, 则该双曲线的方程为

- (A) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ (B) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ (C) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ (D) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$

8. 若函数 $f(x) = kx - 2\ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 k 的取值范围是

- (A) $[1, +\infty)$ (B) $[2, +\infty)$ (C) $(0, 1]$ (D) $(0, 2]$

9. 赵爽是我国古代著名数学家,他用于证明勾股定理的“赵爽弦图”是由四个全等的直角三角形和一个小四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 构成,如图所示。已知直角三角形的两条直角边长分别为 3, 4, 若在“赵爽弦图”中随机取一点,则该点取自四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 区域内的概率为

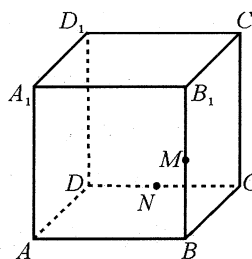


- (A) $\frac{9}{25}$ (B) $\frac{1}{25}$
(C) $\frac{16}{25}$ (D) $\frac{4}{25}$

10. 若数据 9, m , 6, n , 5 的平均数为 7, 方差为 2, 则数据 11, 9, $2m-1$, 17 , $2n-1$ 的平均数和方差分别为

- (A) 13, 4 (B) 14, 4 (C) 13, 8 (D) 14, 8

11. 如图,已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M, N 分别为 BB_1, CD 的中点。有下列结论:



- ① 三棱锥 $A_1 - MND_1$ 在平面 D_1DCC_1 上的正投影图为等腰三角形;
- ② 直线 $MN \parallel$ 平面 A_1DC_1 ;
- ③ 在棱 BC 上存在一点 E , 使得平面 $AEB_1 \perp$ 平面 MNB ;
- ④ 若 F 为棱 AB 的中点, 且三棱锥 $M - NFB$ 的各顶点都在同一球面上, 则该球的体积为 $\sqrt{6}\pi$.

其中正确结论的个数是

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

12. 若正实数 x_1 是函数 $f(x) = xe^x - x - e^2$ 的一个零点, x_2 是函数 $g(x) = (x - e)(\ln x - 1) - e^3$ 的一个大于 e 的零点, 则 $\frac{x_1(x_2 - e)}{e^2}$ 的值为

- (A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{1}{e^2}$ (C) e (D) e^2

第Ⅱ卷(非选择题,共90分)

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.把答案填在答题卡上.

13. 已知向量 $a=(1,m)$, $b=(n,4)$, 其中 $m,n \in \mathbf{R}$. 若 $b=2a$, 则 $m+n$ 的值为_____.

14. 记函数 $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$. 若 $f(x)=f'(1)x^2-\frac{1}{x}$, 则 $f'(-1)$ 的值为_____.

15. 设直线 $l: \begin{cases} x=1+\frac{1}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 与抛物线 $C: y^2=4x$ 相交于 A, B 两点, 点 $M(1,0)$. 则

$|MA|+|MB|$ 的值为_____.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以坐标原点 O 为圆心, 线段 F_1F_2 为直径的圆与椭圆 C 在第一象限相交于点 A . 若 $|AF_1| \leq 2|AF_2|$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围为_____.

三、解答题:本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分12分)

设函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+(a-1)x-1$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 若函数 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线与 x 轴平行.

(I) 求 a 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

18. (本小题满分12分)

某建设行政主管部门对辖区内 A, B, C 三类工程共120个项目进行验收评估, 规定评估分数在85分及其以上的项目被确定为“验收合格”项目, 未达到85分的项目被确定为“有待整改”项目. 现通过分层抽样的方法获得了三类工程的12个项目, 其评估分数如下:

A类: 88, 90, 86, 87, 79;

B类: 85, 82, 91, 74, 92;

C类: 84, 90.

(I) 试估算 A, B, C 这三类工程中每类工程项目的个数;

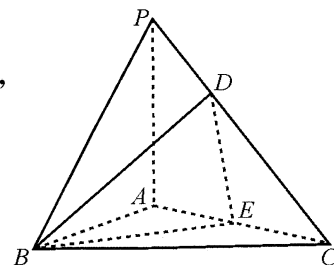
(II) 在选取的样本中, 从B类的5个工程项目中随机选取2个项目进行深度调研, 求选出的2个项目中既有“验收合格”项目, 又有“有待整改”项目的概率.

19. (本小题满分12分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 ABC , $PA=AB=2$, $\angle BAC=90^\circ$, D 为 PC 上一点, 且 $PC=3PD$, $PC \perp BD$.

(I) 求 AC 的长;

(II) 若 E 为 AC 的中点, 求二面角 $D-BE-A$ 的余弦值.



20. (本小题满分12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的右焦点为 F_2 , 上顶点为 H , O 为坐标原点, $\angle OHF_2=30^\circ$, 点 $(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 E 上.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设经过点 F_2 且斜率不为0的直线 l 与椭圆 E 相交于 A, B 两点, 点 $P(-2,0), Q(2,0)$. 若 M, N 分别为直线 AP, BQ 与 y 轴的交点, 记 $\triangle MPQ, \triangle NPQ$ 的面积分别为 $S_{\triangle MPQ}, S_{\triangle NPQ}$, 求 $\frac{S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle NPQ}}$ 的值.

21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\cos x$.

(I) 证明: $f(x) \geq 1$;

(II) 设函数 $g(x)=(\sin x+\cos x-2x-2)e^{-x}$, $F(x)=af(x)+g(x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 若函数 $F(x)$ 存在非负的极小值, 求 a 的取值范围.

22. (本小题满分10分) 选修4-4: 坐标系与参数方程

如图, 在极坐标系 Ox 中, 圆 O 的半径为2, 半径均为1的两个半圆弧 C_1, C_2 所在圆的圆心分别为 $O_1(1, \frac{\pi}{2}), O_2(1, \frac{3\pi}{2})$, M 是半圆弧 C_1 上的一个动点.

(I) 当 $\angle MOO_1=\frac{\pi}{6}$ 时, 求点 M 的极坐标;

(II) 以 O 为坐标原点, 极轴 Ox 为 x 轴正半轴, $\overrightarrow{OO_1}$ 的方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系. 若点 N 为线段 MO_2 的中点, 求点 N 的轨迹方程.

