

成都市 2020 级高中毕业班摸底测试

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. A; 2. B; 3. D; 4. B; 5. A; 6. C; 7. C; 8. B; 9. B; 10. C; 11. D; 12. C.

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. 4; 14. 3; 15. $\frac{16}{3}$; 16. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) $f'(x) = -x^2 + 2x + a - 1$2 分

$\because$ 函数 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线与 x 轴平行,

$\therefore f'(0) = a - 1 = 0$. 解得 $a = 1$4 分

此时 $f(0) = -1 \neq 0$, 满足题意.

$\therefore a = 1$5 分

(II) 由 (I) 得 $f'(x) = -x^2 + 2x = -x(x - 2)$.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = 2$7 分

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	单调递减 ↘	-1	单调递增 ↗	$\frac{1}{3}$	单调递减 ↘

.....11 分

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 2)$; 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$.

.....12 分

18. 解:(I) 根据分层抽样的定义, 有

A 类工程有 $120 \times \frac{5}{12} = 50$;1 分

B 类工程有 $120 \times \frac{5}{12} = 50$;2 分

C 类工程有 $120 \times \frac{2}{12} = 20$3 分

$\therefore$ A, B, C 三类工程项目的个数可能是 50, 50, 20.4 分

(II) 易知在 B 类工程抽样的这 5 个项目中,

被确定为“验收合格”的项目有 3 个, 所得评估分数分别为 85, 91, 92;5 分

被确定为“有待整改”的项目有 2 个, 所得评估分数分别为 82, 74.6 分

记选出的 2 个项目中既有“验收合格”项目,又有“有待整改”项目为事件 M .

在 B 类工程的 5 个项目中随机抽取 2 个项目的评估分数数据组合有 $\{85,91\}, \{85,92\}, \{91,92\}, \{85,82\}, \{85,74\}, \{91,82\}, \{91,74\}, \{92,82\}, \{92,74\}, \{82,74\}$, 共计 10 种结果.9 分

抽取的 2 个项目中既有“验收合格”项目,又有“有待整改”项目的评估分数数据组合有 $\{85,82\}, \{85,74\}, \{91,82\}, \{91,74\}, \{92,82\}, \{92,74\}$, 共计 6 种结果.11 分

故所求概率为 $P(M) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$12 分

19. 解:(I) $\because PA \perp$ 平面 $ABC, AB, AC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore PA \perp AB, PA \perp AC$.

又 $\angle BAC = 90^\circ$, $\therefore$ 以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$.

则 $P(0,0,2), B(2,0,0)$,

设 $|AC| = m (m > 0)$.

则 $C(0,m,0), \overrightarrow{PC} = (0,m,-2)$1 分

由 $\overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PD}$, 得 $D(0, \frac{m}{3}, \frac{4}{3})$, 则 $\overrightarrow{BD} = (-2, \frac{m}{3}, \frac{4}{3})$2 分

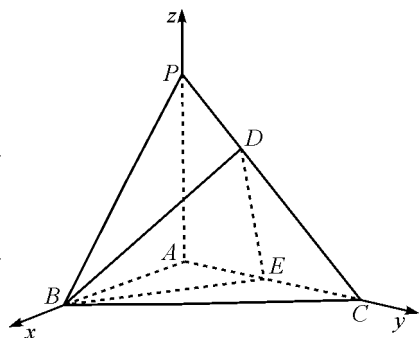
$\because PC \perp BD$, 即 $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{BD}$,

$\therefore \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \times (-2) + m \times \frac{m}{3}$

$+ (-2) \times \frac{4}{3} = 0$, 即 $m^2 = 8$4 分

又 $m > 0$, 解得 $m = 2\sqrt{2}$.

$\therefore AC$ 的长为 $2\sqrt{2}$5 分



(II) $\because E$ 为 AC 的中点, 由(I)知 $E(0, \sqrt{2}, 0), D(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3})$.

则 $\overrightarrow{BD} = (-2, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3}), \overrightarrow{ED} = (0, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{4}{3})$.

设平面 DBE 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$.

由 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{ED} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -2x + \frac{2\sqrt{2}}{3}y + \frac{4}{3}z = 0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{3}y + \frac{4}{3}z = 0. \end{cases}$

令 $z = 1$, 得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 2\sqrt{2}. \end{cases} \therefore \mathbf{n}_1 = (2, 2\sqrt{2}, 1)$8 分

平面 ABE 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (0, 0, 1)$9 分

设二面角 $D-BE-A$ 的平面角为 θ .

$\therefore |\cos \theta| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$,11 分

易知二面角 $D-BE-A$ 为锐角,

$\therefore$ 二面角 $D-BE-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$12 分

20. 解:(I)由 $\angle OHF_2=30^\circ$,得 $b=\sqrt{3}c$ (c 为半焦距),1分

$\because$ 点 $(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 E 上,则 $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$2分

又 $a^2=b^2+c^2$,解得 $a=2, b=\sqrt{3}, c=1$.

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4分

(II)由(I)知 $F_2(1,0)$.设直线 $l:x=my+1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} x=my+1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 消去 x ,得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

显然 $\Delta=144(m^2+1)>0$5分

则 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}, y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$6分

$\therefore my_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$7分

由 $P(-2,0), Q(2,0)$,得直线 AP 的斜率 $k_1=\frac{y_1}{x_1+2}$,直线 BQ 的斜率为 $k_2=\frac{y_2}{x_2-2}$.

又 $|k_1|=\frac{|OM|}{|OP|}, |k_2|=\frac{|ON|}{|OQ|}, |OP|=|OQ|=2, \therefore \frac{|OM|}{|ON|}=\frac{|k_1|}{|k_2|}$.

$\therefore \frac{S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle NPQ}}=\frac{\frac{1}{2}|PQ|\cdot|OM|}{\frac{1}{2}|PQ|\cdot|ON|}=\frac{|OM|}{|ON|}=\frac{|k_1|}{|k_2|}$9分

$\therefore \frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{(x_1+2)y_2}=\frac{y_1(my_2-1)}{(my_1+3)y_2}=\frac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}$
 $=\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}=\frac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}=\frac{1}{3}$11分

$\therefore \frac{S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle NPQ}}=\frac{1}{3}$12分

21. 解:(I) $f'(x)=x-\sin x$1分

令 $h(x)=f'(x)$,则 $h'(x)=1-\cos x$2分

$\because x \in \mathbf{R}, \cos x \in [-1, 1],$

$\therefore h'(x) \geq 0$ 恒成立,即 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.3分

又 $h(0)=f'(0)=0-\sin 0=0$,

$\therefore$ 当 $x<0$ 时,有 $f'(x)<0$;当 $x>0$ 时,有 $f'(x)>0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上为减函数,在 $(0, +\infty)$ 上为增函数.4分

$\therefore f(x)_{\text{最小值}}=f(0)=\frac{1}{2} \times 0^2 + \cos 0 = 1$.

$\therefore f(x) \geq 1$5分

(II) $F'(x)=af'(x)+g'(x)=a(x-\sin x)+\frac{2(x-\sin x)}{e^x}=(x-\sin x)(a+\frac{2}{e^x})$7分

由(I)知 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

$\therefore$ 当 $x<0$ 时,有 $f'(x)<f'(0)=0$,即 $x-\sin x<0$;

当 $x>0$ 时,有 $f'(x)>f'(0)=0$,即 $x-\sin x>0$.

(i) 当 $a \geq 0$ 时, $\because y = a + \frac{2}{e^x} > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $F'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$.

$\therefore$ 函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数.

$\therefore F(x)_{\text{极小值}} = F(0) = af(0) + g(0) = a - 1 \geq 0$, 即 $a \geq 1$;8 分

(ii) 当 $a < 0$ 时, 由 $F'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = \ln(-\frac{2}{a})$, 且 $y = a + \frac{2}{e^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

① 当 $-2 < a < 0$ 时, $x_2 > 0$.

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, 有 $F'(x) < 0$; 当 $0 < x < x_2$ 时, 有 $F'(x) > 0$; 当 $x > x_2$ 时, 有 $F'(x) < 0$,

$\therefore$ 函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 在 $(0, x_2)$ 上为增函数, 在 $(x_2, +\infty)$ 上为减函数.

$\therefore F(x)_{\text{极小值}} = F(0) = a - 1 < 0$.

不符合题意;9 分

② 当 $a = -2$ 时, $x_2 = 0$.

$\therefore$ 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, 有 $F'(x) \leq 0$ 恒成立, 故 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.

$\therefore$ 函数 $F(x)$ 不存在极小值点, 不符合题意;10 分

③ 当 $a < -2$ 时, $x_2 < 0$.

$\therefore$ 当 $x < x_2$ 时, 有 $F'(x) < 0$; 当 $x_2 < x < 0$ 时, 有 $F'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时, 有 $F'(x) < 0$,

$\therefore$ 函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, x_2)$ 上为减函数, 在 $(x_2, 0)$ 上为增函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

$\therefore F(x)_{\text{极小值}} = F(x_2) < F(0) = a - 1 < 0$.

不符合题意.11 分

综上所述, 若函数 $F(x)$ 存在非负的极小值, 则 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$12 分

22. 解: (I) 由 $O_1(1, \frac{\pi}{2})$, $\angle MOO_1 = \frac{\pi}{6}$, 得点 M 的极角为 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$2 分

在等腰 $\triangle O_1MO$ 中, 由正弦定理得 $\frac{|O_1M|}{\sin \angle MOO_1} = \frac{|OM|}{\sin \angle MO_1O}$,

$$\text{即 } \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{|OM|}{\sin \frac{2\pi}{3}}.$$

$$\therefore |OM| = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \quad \text{.....4 分}$$

$\therefore$ 点 M 的极坐标为 $(\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3})$5 分

(II) 由题意, 在直角坐标系中, 点 M 在以 $(0, 1)$ 为圆心, 1 为半径的半圆弧 C_1 上,

其参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数, 且 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$).7 分

设线段 MO_2 的中点 N 的坐标为 (x, y) .

已知点 $M(\cos \theta, 1 + \sin \theta)$, $O_2(0, -1)$, 由中点坐标公式可得

$$\begin{cases} x = \frac{0 + \cos \theta}{2} = \frac{1}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{-1 + 1 + \sin \theta}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta. \end{cases} \quad \text{.....9 分}$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 的轨迹方程为 } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{1}{2} \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数, 且 } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}). \quad \text{.....10 分}$$