

成都七中高 2023 届高三上期半期考试(理科)参考答案

一.选择题

1.C 2.D 3.C 4.A 5.B 6.C 7.B 8.A 9.D
10.A 11.D 12.B

12. 解析：① $f(1-x) = f(1+x)$ 可知 $g(1+x) + g(1-x) = 0$ ，令 $x=0$ 可知 $g(1)=0$ ，故①正确；

由 $g(1+x) + g(1-x) = 0$ 和 $g(2+x) = g(2-x)$ 可知， $g(x)$ 关于 $(1,0)$ 中心对称，关于 $x=2$ 轴对称，
则 $g(x)$ 的周期为 $T=4$ ， $g(x)$ 的对称轴为 $x=2$ ，可知②错误；

③ 由 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 单调递增，可知 $g(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，由 $g(1)=0$ ，由 $g(x)$ 关于 $x=2$ 轴对称可知
 $g(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递减 $\therefore g(3)=0$ ， $\therefore$ 一个 T 之内只有两个零点，
 $\therefore [0,2022]$ 内共有 $505T + 2 = 505 \times 2 + 1 = 1011$ 个零点，故③正确；

④ 由③，又 $a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{5}{2}, \therefore g(a_1) = g(a_2) = -1, g(a_3) = g(a_4) = 1$ ，

可知：一个周期和为 0，故 $\sum_{i=1}^{2022} g(a_i) = 505 \times T + g(a_1) + g(a_2) = -2$ ，故④正确。

二.填空题

13. $\frac{1}{6}$ 14. $\frac{1}{4}$ 15. $(0, \frac{1}{e^2})$ 16. $\frac{5\sqrt{41}}{41}$

三.解答题

17. 解(I): $\because b \cos C - c \cos B = \sqrt{2}a$ ，由正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ，

$\therefore 2R \sin B \cos C - 2R \sin C \cos B = 2\sqrt{2}R \sin A$ ，

$\therefore \sin B \cos C - \sin C \cos B = \sqrt{2} \sin A$ ，又 $A = \frac{\pi}{4}$ ，……………2分

$\therefore \sin(B-C) = 1$ 。……………6分

(II) 由(I)可知： $B-C = \frac{\pi}{2}$ ，且 $B+C = \pi - A = \frac{3\pi}{4}$ ，解得 $B = \frac{5\pi}{8}$ ， $C = \frac{\pi}{8}$ ，

又 $a = \sqrt{2}$ ， $A = \frac{\pi}{4}$ ，则由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$ ，……………8分

$$\therefore b = 2 \sin B, c = 2 \sin C, \text{ 又 } \sin \frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8}, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 2 \sin B \times 2 \sin C = \sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} \\ &= \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

18.解:(I)经计算 $\bar{t} = 3, \bar{y} = 36, \dots\dots\dots 2 \text{分}$

$$\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) = 68, \sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2 = 10, \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 480, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\text{由 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2 \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{68}{\sqrt{10 \times 480}} = \frac{68}{40\sqrt{3}} \approx \frac{68}{69.2} \approx 0.98,$$

则 y 与 t 相关程度很强. $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

$$\text{(II) 由 (I) 可得 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{68}{10} = 6.8, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\therefore a = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 36 - 6.8 \times 3 = 15.6, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\therefore y \text{ 与 } t \text{ 的回归直线方程为 } y = 6.8t + 15.6. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\text{又 2025 年对应的代号 } t = 9, \text{ 则 } y = 6.8 \times 9 + 15.6 = 76.8,$$

$\therefore$ 该种商品 2025 年的销售收入大约为 76.8 万元. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

19.(I)证明: $\because DE \perp A_1D, DE \perp DC, A_1D \cap CD = D,$

$\therefore DE \perp$ 平面 $A_1DC, \dots\dots\dots 2 \text{分}$

$\therefore DE \perp A_1C,$ 又 $\because A_1C \perp CD, CD \cap DE = D,$

$\therefore A_1C \perp$ 平面 $BCDE,$

$\therefore A_1C \perp BD. \dots\dots\dots 5 \text{分}$

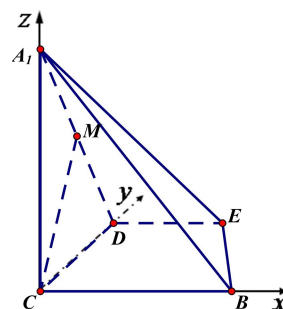
(II)解: 由题意, CB, CD, CA_1 两两垂直,

建立如图所示空间直角坐标系 $C-xyz,$

$$\text{易得 } B(3, 0, 0), D(0, 2, 0), E(2, 2, 0), A_1(0, 0, 2\sqrt{3})$$

$$\text{设 } \overrightarrow{DM} = \lambda \overrightarrow{DA_1}, \text{ 则 } M(0, 2-2\lambda, 2\sqrt{3}\lambda)$$

$$\text{设平面 } BEM \text{ 的一个法向量为 } \vec{n} = (x, y, z), \text{ 且 } \overrightarrow{BM} = (-3, 2-2\lambda, 2\sqrt{3}\lambda), \overrightarrow{BE} = (-1, 2, 0),$$



$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BM} = -3x + (2-2\lambda)y + 2\sqrt{3}\lambda z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BE} = -x + 2y = 0 \end{cases}, \text{不妨取 } y=1, \text{解得 } \vec{n} = (2, 1, \frac{2+\lambda}{\sqrt{3}\lambda}). \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

设平面 BEA_1 的一个法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 且 $\vec{BA_1} = (-3, 0, 2\sqrt{3})$,

$$\therefore \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BA_1} = -3x_1 + 2\sqrt{3}z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BE} = -x_1 + 2y_1 = 0 \end{cases}, \text{不妨取 } y_1=1, \text{得 } x_1=2, z_1=\sqrt{3}, \text{则 } \vec{m} = (2, 1, \sqrt{3}). \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

设平面 BEM 与平面 BEA_1 所成角为 θ ,

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{\left|6 + \frac{2}{\lambda}\right|}{\sqrt{8} \times \sqrt{5 + \frac{(2+\lambda)^2}{3\lambda^2}}} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

化简可得 $2\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0$, 解之得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = 3$,

$\therefore DM = 2$ 或 12 . $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

20.(I)解: 设抛物线的方程为 $y^2 = 2px (p > 0)$, 则焦点 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 又知直线 $l: x - y + 2 = 0$,

$$\therefore \text{焦点 } F \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{\left|\frac{p}{2} - 0 + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{解得 } p = 2,$$

$\therefore$ 抛物线的方程为 $y^2 = 4x$. $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

(II)证明: 易知 $k_{AB} \neq 0$, 设直线 AB 方程为 $x = my + 1$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{化简得 } y^2 - 4my - 4 = 0,$$

由 $\Delta = 16m^2 + 16 > 0$ 恒成立, 可得 $y_1 \cdot y_2 = -4$, $y_1 = 2m + 2\sqrt{m^2 + 1}$, $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

$$\text{设直线 } MN \text{ 方程为 } x = 2my + 4, \text{联立 } \begin{cases} x = 2my + 4 \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{化简得 } y^2 - 8my - 16 = 0,$$

由 $\Delta = 64m^2 + 64 > 0$ 恒成立, 可得 $y_3 \cdot y_4 = -16$, $y_4 = 4m - 4\sqrt{m^2 + 1}$, $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

$\therefore y_1 \cdot y_4 = -8$, 又 $(y_1 \cdot y_2) \cdot (y_3 \cdot y_4) = 64$, 则 $y_2 \cdot y_3 = -8$, $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

$$\text{由 } k_{AN} = \frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} = \frac{4}{y_1 + y_4}, \text{得直线 } AN \text{ 方程为 } 4x - (y_1 + y_4)y + y_1 y_4 = 0,$$

∴ 直线AN方程为 $4x - (y_1 + y_4)y - 8 = 0$, 即直线AN过定点 $(2, 0)$.

同理直线BM方程为 $4x - (y_2 + y_3)y + y_2y_3 = 0$,

∴ 直线BM方程为 $4x - (y_2 + y_3)y - 8 = 0$, 即直线BM过定点 $(2, 0)$.

∴ 直线AN和直线BM过同一定点 $(2, 0)$12分

21.解 (I) ∵ $f'(x) = 2a(e^x - 1)e^x - (x^2 + 2x)e^x$,

∴ $f'(0) = 0$, 又 ∵ $f(0) = 0$ 可知: 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处切线方程为 $y = 0$3分

(II) 当 $x \geq 0$, $a(e^x - 1)^2 - x^2e^x \geq 0$ 恒成立.

若 $a \leq 0$, 显然不合题意.4分

∴ $a > 0$, 则 $\left[\sqrt{a}(e^x - 1) + xe^{\frac{x}{2}} \right] \left[\sqrt{a}(e^x - 1) - xe^{\frac{x}{2}} \right] \geq 0$ 对 $x \geq 0$ 恒成立,

即 $\sqrt{a}(e^x - 1) - xe^{\frac{x}{2}} \geq 0$ 对 $x \geq 0$ 恒成立,

令 $t = e^{\frac{x}{2}}$, 则 $x = 2 \ln t (t \geq 1)$, 从而 $\sqrt{a}(t - \frac{1}{t}) - 2 \ln t \geq 0$ 对 $t \geq 1$ 恒成立,

构造函数 $G(t) = \sqrt{a}(t - \frac{1}{t}) - 2 \ln t (t \geq 1)$,

∴ $G'(t) = \sqrt{a}(1 + \frac{1}{t^2}) - \frac{2}{t} = \frac{\sqrt{a}(t^2 + 1) - 2t}{t^2}$,6分

(i) 若 $a \geq 1$, 则 $\sqrt{a}(t^2 + 1) - 2t \geq (t - 1)^2 \geq 0$, 故 $G'(t) \geq 0$,

∴ $G(t)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增, 则 $G(t) \geq G(1) = 0$ 成立.

(ii) 若 $0 < a < 1$, 由 $\sqrt{a}(t^2 + 1) - 2t = 0$, 得 $t_1 t_2 = 1$, 则 $t_1 < 1 < t_2 = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}}$,

∴ $G(t)$ 在 $(1, t_2)$ 上单调递减, ∴ $G(t) < G(1) = 0$, 这与已知矛盾.

综上, $a \geq 1$. 所以 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$8分

(III) 解: 由(II)取 $a = 1$, 可知当 $t > 1$, 恒有 $(t - \frac{1}{t}) - 2 \ln t > 0$,

令 $t = \sqrt{\frac{k+2}{k}}$, 则 $\sqrt{\frac{k+2}{k}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{k+2}{k}}} > 2 \ln \sqrt{\frac{k+2}{k}}$,

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{k(k+2)}} > 2 \ln \sqrt{\frac{k+2}{k}}, \text{即} \frac{2}{\sqrt{k^2+2k}} > \ln \frac{k+2}{k} (k=1, 2, 3, \dots, n), \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \frac{2}{\sqrt{k^2+2k}} > \ln\left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} \times \dots \times \frac{n+1}{n-1} \times \frac{n+2}{n}\right) = \ln \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \frac{2}{\sqrt{k^2+2k}} > \ln(n^2+3n+2) - \ln 2,$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \frac{2}{\sqrt{k^2+2k}} + \ln 2 > \ln(n^2+3n+2). \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

22.解:(I)已知圆 $C_1: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$, 得 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$,

$$\because x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta,$$

$\therefore \rho^2 - 6\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 8 = 0$ 为圆 C_1 的极坐标方程.5分

(II)方法一: $\theta = \frac{\pi}{4}$ 可得 $\rho^2 - 5\sqrt{2}\rho + 8 = 0$,解得 $\rho_1 = \sqrt{2}$ 或 $\rho_2 = 4\sqrt{2}$,7分

$$\therefore |AB| = \rho_2 - \rho_1 = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{又} \because r = \sqrt{5}, \text{则} d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{5 - \frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\therefore S_{\Delta C_1 AB} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

方法二: 直线 $C_2: \theta = \frac{\pi}{4}$ 化为直角坐标方程为 $x - y = 0$,7分

圆心 $C(3, 2)$ 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|3-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 由半径 $r = \sqrt{5}$,8分

$$\therefore |AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 3\sqrt{2}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\therefore S_{\Delta C_1 AB} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$23. \text{解: (I)} f(x) = |x+1| - |x-2| = \begin{cases} 3, & x > 2, \\ 2x-1, & -1 \leq x \leq 2, \\ -3, & x < -1. \end{cases}$$

当 $x > 2$ 时, $f(x) = 3 > 2$ 成立;2分

当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = 2x-1 > 2$, 则 $\frac{3}{2} < x \leq 2$;3分

当 $x < -1$ 时, $f(x) = -3 < 2$ 不合题意,4分

综上, $f(x) > 2$ 的解集为 $(\frac{3}{2}, +\infty)$5分

$$(II) f(x) = |x+1| - 2|x-m| = \begin{cases} -x+2m+1, & x > m, \\ 3x+1-2m, & -1 \leq x \leq m, \\ x-2m-1, & x < -1 \end{cases}$$

由 $f(x) = 0$, 解得 $x_1 = 2m+1, x_2 = \frac{2m-1}{3}$, 则 $|x_2 - x_1| = \left| \frac{-4m-4}{3} \right| = \frac{4}{3}(m+1)$,7分

又 $f(x)_{\max} = f(m) = m+1$,

$\therefore S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}(m+1)(m+1) = \frac{2}{3}(m+1)^2 \leq 54$,9分

解得 $-10 \leq m \leq 8$, 又 $m > 0$, 则 $0 < m \leq 8$,

$\therefore m$ 的取值范围是 $(0, 8]$10分