

高2023 届高三一诊模拟考试
数学试题（文科）

考试时间：120 分钟 总分：150 分

一. 选择题（每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求。把答案涂在答题卷上。）

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x | x \geq -1\}$, 则集合 $A \cap B$ 的元素个数为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 若复数 z 满足 $(z-1) \cdot i = 1-i$, 则 z 的虚部是 ()

- A. 1 B. -1 C. i D. -i

3. “ $-1 < m < 7$ ”是“方程 $\frac{x^2}{m+1} + \frac{y^2}{7-m} = 1$ 表示椭圆”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

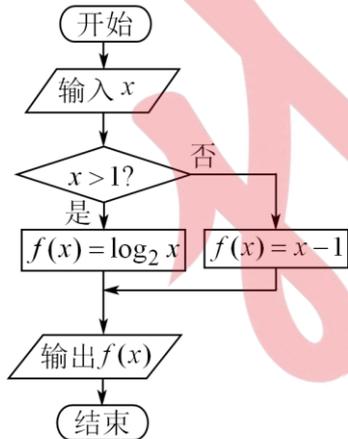
4. 已知圆台形的花盆的上、下底面的直径分别为 8 和 6, 该花盆的侧面展开图的扇环所对的圆心角为 $\frac{\pi}{2}$, 则母线长为 ()

- A. 4 B. 8 C. 10 D. 16

5. 一种药品在病人血液中的量不低于 1500mg 时才有疗效, 如果用药前, 病人血液中该药品的量为 0mg, 用药后, 药在血液中以每小时 20% 的比例衰减. 现给某病人静脉注射了 3000mg 的此药品, 为了持续保持疗效, 则最长需要在多少小时后再次注射此药品 ($\lg 2 \approx 0.301$, 结果精确到 0.1) ()

- A. 2.7 B. 2.9 C. 3.1 D. 3.3

6. 如图所示的程序框图中, 若输出的函数值 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 内, 则输入的实数 x 的取值范围是 ()

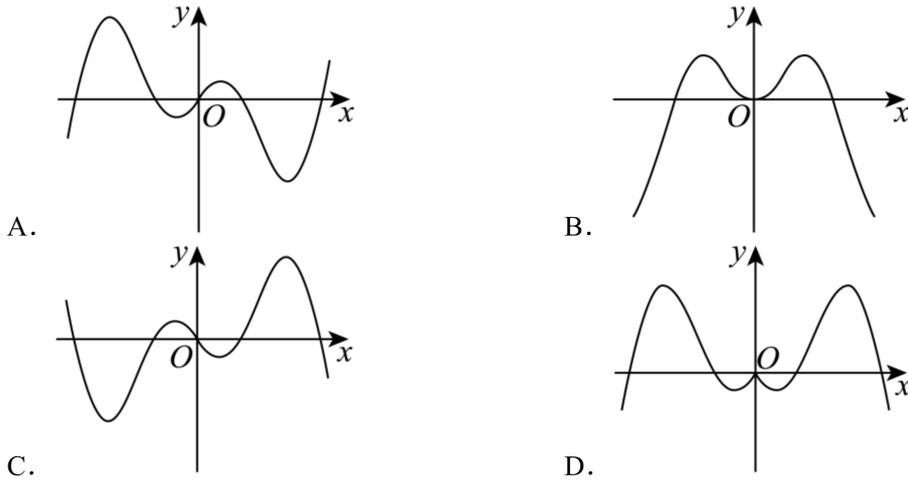


- A. $[-2, 2]$ B. $[-2, 4]$ C. $[-1, 2]$ D. $[-1, 4]$

7. 已知 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 则 $\cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = ()$

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

8. 已知函数 $f(x) = x \cos x$ ，则 $y = f(x)$ 的大致图象是 ()



9. 记数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，下列结论中一定成立的是 ()

- A. 若 $a_1 + a_2 > 0$ ，则 $a_2 + a_3 > 0$ B. 若 $a_1 < a_2$ ，则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$
 C. 若 $a_1 + a_3 < 0$ ，则 $a_4 + 2a_1 < 0$ D. 若 $a_1 < 0$ ，则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

10. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 4，点 $M(x_1, y_1)$ ，

$N(x_2, y_2)$ 在抛物线 C 上，若 $(y_1 - 2y_2)(y_1 + 2y_2) = 48$ ，则 $\frac{|MF|}{|NF|} = ()$.

- A. 4 B. 2 C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

11. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的一动点， M 为线段 DC 的中点，则下列说法错误的是 ()

- A. 平面 PAM 内任意一条直线都不与 BC 平行
 B. 平面 PBC 内存在无数条直线与平面 PAM 平行
 C. 平面 PAM 和平面 PBC 的交线不与平面 $ABCD$ 平行
 D. 平面 PAB 和平面 PCM 的交线不与平面 $ABCD$ 平行

12. 已知 $a > b$ ，且 $e^a - a = e^b - b = 1.01$ ，则下列说法正确的有 ()

- ① $b < -1$ ② $0 < a < \frac{1}{2}$ ③ $b + a < 0$ ④ $a - b < 1$

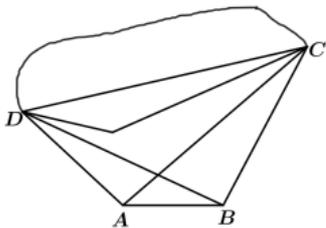
- A. ①②③ B. ②③④ C. ②④ D. ③④

二、填空题 (本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，答案填在答题卷的横线上。)

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y \geq 0, \\ x + 2y \leq 5, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $x - y$ 的最大值为_____.

14. 已知 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{9}{4-x} (0 < x < 4)$ ，则 $f(x)$ 的最小值为_____.

15. 为了测量成都七中曦园 C, D 两点之间的距离，如图，在东西方向上选取相距 1 百米的 A, B 两点，点 B 在点 A 的正东方向上，且 A, B, C, D 四点在同一水平面上. 从点 A 处观测得点 C 在它的东北方向上，点 D 在它的西北方向上；从点 B 处观测得点 C 在它的北偏东 15° 方向上，点 D 在它的北偏西 75° 方向上，则 C, D 之间的距离为_____百米.



16. 已知 $A(2,0)$, $O(0,0)$, 且 $|\overline{OB}| = |\overline{OC}| = 2$, 则 $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ 的最小值是_____.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分，每题 12 分.

17. 已知锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 所对的边分别记作 a, b, c , 满足 $a = 6$, $b = 5$ 且 $\sin A = \sin 2B$.

(1) 求边 c ;

(2) 若点 M, N 分别在边 AB 和 AC 上，且 MN 将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分，求 MN 的最小值.

18. 新冠肺炎是近百年来人类遭遇的影响范围最广的全球性大流行病毒. 对前所未知、突如其来、来势汹汹的疫情天灾，习近平总书记亲自指挥、亲自部署，强调把人民生命安全和身体健康放在第一位. 明确坚决打赢疫情防控的人民战争、总体战、阻击战. 当前，新冠肺炎疫情防控形势依然复杂严峻. 在传染病学中，通常把从致病刺激物侵入机体或者对机体发生作用起，到机体出现反应或开始呈现该疾病对应的相关症状时止的这一阶段称为潜伏期. 一研究团队统计了某地区 1000 名患者的相关信息，得到如下表格：

分组	第 1 组	第 2 组	第 3 组	第 4 组	第 5 组	第 6 组	第 7 组
潜伏期 (单位: 天)	$[0, 2]$	$(2, 4]$	$(4, 6]$	$(6, 8]$	$(8, 10]$	$(10, 12]$	$(12, 14]$
人数	100	200	300	250	130	15	5

(1) 现在用分层抽样的方法在第二，三组共选取 5 人参加传染病知识学习，若从参加学习的 5 人中随机选取 2 人参加考试，求恰有一人来自第二组的概率；

(2) 该传染病的潜伏期受诸多因素的影响，为研究潜伏期与患者年龄的关系，以潜伏期是否超过 6 天为标准进行分层抽样，从上述 1000 名患者中抽取 200 人，得到如下列联表. 请将列联表补充完整，并根据列联表判断是否有 95% 的把握认为潜伏期与患者年龄有关.

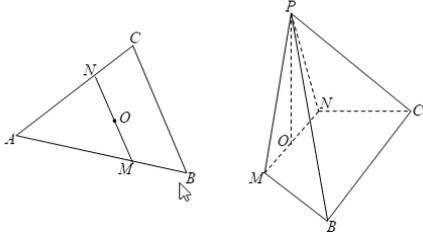
	潜伏期 ≤ 6 天	潜伏期 > 6 天	总计
50 岁以上 (含 50 岁)			100
50 岁以下	55		
总计			200

附：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.025	0.0010
k_0	3.841	5.024	6.635

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

19. 如图所示，已知 $\triangle ABC$ 是边长为6的等边三角形，点 M 、 N 分别在 AB ， AC 上， $MN \parallel BC$ ， O 是线段 MN 的中点，将 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 进行翻折， A 翻折到点 P ，使得平面 $PMN \perp$ 平面 $MNCB$ ，如图所示。



- (1) 求证： $PO \perp BM$ ；
 (2) 若 $MN = 4$ ，求点 M 到平面 PBC 的距离。

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 且四个点 $A(2, \sqrt{3})$ 、 $B(\frac{3}{2}, -\sqrt{3})$ 、 $C(-2, \sqrt{3})$ 、 $D(3, \frac{\sqrt{7}}{2})$ 中恰好有三个点在椭圆 C 上， O 为坐标原点。

- (1) 求椭圆 C 的方程；
 (2) 若直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点，且 $\angle AOB = 90^\circ$ ，证明：直线 l 与定圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切，并求出 r 的值。

21. 设函数 $u(x) = \ln x - ax + a, (a \in R)$ 。

- (1) 求 $u(x)$ 的单调区间；
 (2) 若 $f(x) = u(x) - a + 1$ 的两个零点 x_1, x_2 且 $\frac{x_2}{2} - x_1 > 0$ ，

求证： $2 \ln x_1 + 3 \ln x_2 > 8 \ln 2 - 5$

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi)$ ，点

$A(-3, 0)$ ，以坐标原点 O 为极点， x 轴为正半轴为极轴的建立极坐标系。

- (1) 求曲线 C 的极坐标方程；
 (2) 过坐标原点 O 任作直线 l 与曲线 C 交于 E, F 两点，求 $|AE| \cdot |AF|$ 的值。

23. 已知 $a, b, c \in R^+, \forall x \in R$ ，不等式 $|x-1| - |x-2| \leq a+b+c$ 恒成立。

- (1) 求证： $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ ；
 (2) 求证： $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}$ 。