

绵阳南山中学 2023 年春高三入学考试数学参考答案 (文科)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	A	B	B	B	C	A	B	C	D	C

1. 【详解】 $\because$ 集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | \log_2 x < 1\} = \{x | 0 < x < 2\}$, $\therefore A \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$, 故 A 错误, D 正确; $A \cup B = \{x | x < 2\}$, 故 B, C 错误. 故选: D.

2. 【详解】因为复数 z 对应点的坐标为 $(1, -1)$, 所以 $z = 1 - i$, 所以 $\frac{z}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2i}{2} = -i$.

故选: B.

3. 【详解】因为 $f(x) = \left(1 - \frac{2}{1+e^x}\right) \sin x = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) \sin x$, 定义域为 $\mathbb{R}$, 又

$f(-x) = \left(\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right) \sin(-x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \sin x = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 故排除 CD,

又当 $x \in (0, \pi)$ 时, $\frac{e^x-1}{e^x+1} > 0, \sin x > 0, f(x) > 0$, 故排除 B. 故选: A.

4. 【详解】“金、石”为打击乐器共 2 种, “匏、竹”为吹奏乐器共 2 种, “丝”为弹拨乐器, 共 1 种, 5 选 2 的基本事件有 (金、石) (金、匏) (金、竹) (金、丝) (石、匏) (石、竹) (石、丝) (匏、竹) (匏、丝) (竹、丝), 共 10 种情况, 其中恰安排了 1 个课程为吹奏乐器、1 个课程为打击乐器的基本事件为 (金、匏) (金、竹) (石、匏) (石、竹), 共 4 种, 故所求概率为 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. 故选: B.

5. 【详解】 $\ln \frac{a}{b} > 0$, 则 $\frac{a}{b} > 1$, 当 $a = -2, b = -1$ 时, 满足 $\frac{a}{b} > 1$, 但此时 $\ln a, \ln b$ 无意义, 故充分性不

成立, 若 $\ln a > \ln b$, 则 $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} > 0$, 故必要性成立, 则 “ $\ln \frac{a}{b} > 0$ ” 是 “ $\ln a > \ln b$ ” 的必要不充

分条件. 故选: B

6. 【详解】因为 $a \parallel b$, 所以 $1 - 4 \cos 2\alpha = \sin \alpha (3 \sin \alpha - 2)$, $1 - 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) = 3 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha$,

$5 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 3 = 0$, 所以 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ 或 $\sin \alpha = -1$, 又 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$,

所以 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, 所以 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{\frac{3}{4} - 1}{1 + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{7}$, 故选: B.

7. 【详解】 $f(x) = \sin x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$.

将其图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到 $g(x) = -\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6}\right] + \frac{1}{2} = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$ 的图象;

对 A: $g(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 A 错误;

对 B: 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}\right]$, 此时 $g(x)$ 不是单调函数, 故 B 错误;

对 C: $g\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 为函数最小值, 故 $x = \frac{\pi}{12}$ 是 $g(x)$ 的对称轴, C 正确;

对 D: $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \neq 0$, 故 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 不是 $g(x)$ 的对称中心, D 错误. 故选: C.

8. 【详解】由题意可得, $\begin{cases} f(0)=1.5 \\ f(2)=4.5 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} \frac{6}{1+3^b}=1.5 \\ \frac{6}{1+3^{2k+b}}=4.5 \end{cases}$, 解得 $b=1, k=-1$, 所以 $f(x) = \frac{6}{1+3^{-x+1}}, x \in \mathbb{N}$.

由函数的解析式可得, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(3) = \frac{6}{1+3^{-2}} = 5.4$, 故该果树的高度不低于 5.4m,

至少需要 3 年. 故选: A.

9. 【详解】由线面平行的性质定理可知, A 正确; 若 $m \parallel \alpha, m \parallel n$, 则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \subseteq \alpha$, 即 B 错误;

设 α, β 的法向量分别为 $\vec{a}, \vec{b}$, 若 $\alpha \cap \beta = n$, 则 $n \perp \vec{a}, n \perp \vec{b}$, 又 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\vec{a} \parallel \gamma, \vec{b} \parallel \gamma$, 所

以 $n \perp \gamma$, 即 C 正确; 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$, 又 $\alpha \parallel \gamma$, 则 $\beta \parallel \gamma$, 即 D 正确. 故选: B

10. 【详解】如图, 过点 B 作 BD 垂直准线 $x = -2$ 于点 D, 则由抛物线定义可知: $|BF| = |BD| = 3$,

设直线 AB 为 $x = my + 4$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(-2, y_c)$, 不妨设 $m > 0$, 则 $y_1 > 0, y_2 < 0$,

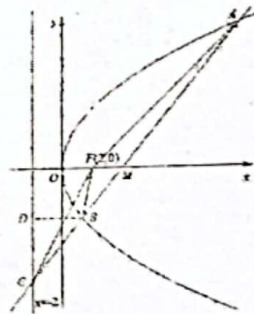
所以 $x_2 + 2 = 3$, 解得: $x_2 = 1$, 则 $y_2^2 = 8x_2 = 8$, 解得: $y_2 = -2\sqrt{2}$, 则 $B(1, -2\sqrt{2})$.

所以 $-2\sqrt{2}m + 4 = 1$, 解得: $m = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, 则直线 AB 为 $x = \frac{3\sqrt{2}}{4}y + 4$,

所以当 $x = -2$ 时, 即 $\frac{3\sqrt{2}}{4}y + 4 = -2$, 解得: $y_c = -4\sqrt{2}$, 则 $C(-2, -4\sqrt{2})$.

联立 $x = my + 4$ 与 $y^2 = 8x$ 得: $y^2 - 8my - 32 = 0$, 则 $y_1 y_2 = -32$,

所以 $y_1 = 8\sqrt{2}$, 其中 $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}} = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_c}{y_1 - y_c} = \frac{2\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{6}$. 故选: C



11. 【详解】依题意得, 以线段 $F_1 F_2$ 为直径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = c^2$, 双曲线 C 的一条渐近线的

方程为 $y = \frac{b}{a}x$. 由 $\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$ 以及 $a^2 + b^2 = c^2$, 解得 $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$. 不妨取 $M(a, b)$, 则

$N(-a, -b)$. 因为 $A(-a, 0)$, $\angle MAN = 135^\circ$, 所以 $\angle MAO = 45^\circ$, 又 $\tan \angle MAO = \frac{b}{2a}$, 所以 $1 = \frac{b}{2a}$,

所以 $b = 2a$, 所以该双曲线的离心率 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{5}$. 故选: D.

12. 【详解】令函数 $f(x) = x - \ln x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(5) > f(4) > f(3)$, 所以 $5 - \ln 5 > 4 - \ln 4 > 3 - \ln 3$,

因为 $a - 5 = \ln \frac{a}{5} = \ln a - \ln 5 < 0$, $b - 4 = \ln \frac{b}{4} = \ln b - \ln 4 < 0$, $c - 3 = \ln \frac{c}{3} = \ln c - \ln 3 < 0$,

所以 $a - \ln a = 5 - \ln 5$, $b - \ln b = 4 - \ln 4$, $c - \ln c = 3 - \ln 3$,

所以 $a - \ln a > b - \ln b > c - \ln c$, 即 $f(a) > f(b) > f(c)$,

因为 $a - 5 = \ln a - \ln 5 < 0$, 可得 $a < 5$, 又因为 $f(a) = f(5)$, 则 $0 < a < 1$,

同理 $f(b) = f(4)$, $f(c) = f(3)$, 所以 $0 < b < 1$, $0 < c < 1$,

因为当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 所以 $c > b > a$. 故选: C.

13. 【答案】 -1 【详解】 $f\left(\frac{2021}{2}\right) = f\left(1010 + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. 故答案为: -1

14. 【答案】 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ 【解析】 $\because y = (x+a)e^x$, $\therefore y' = (x+1+a)e^x$,

设切点为 (x_0, y_0) , 则 $y_0 = (x_0 + a)e^{x_0}$, 切线斜率 $k = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}$,

切线方程为: $y - (x_0 + a)e^{x_0} = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}(x - x_0)$,

$\because$ 切线过原点, $\therefore -(x_0 + a)e^{x_0} = (x_0 + 1 + a)e^{x_0}(-x_0)$, 整理得: $x_0^2 + ax_0 - a = 0$,

$\because$ 切线有两条, $\therefore \Delta = a^2 + 4a > 0$, 解得 $a < -4$ 或 $a > 0$, $\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$,

故答案为: $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

15. 【答案】 24π 【详解】解: 由题意, 画出示意图如图: 则正方形 $ABCD$ 面积 $S=4$,

$\therefore$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3}S \cdot PA = \frac{1}{3} \times 4 \times PA = \frac{16}{3}$, $\therefore PA = 4$,

$AC = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2}$, $PC = \sqrt{AC^2 + AP^2} = 2\sqrt{6}$

球 O 的半径 $R = \frac{1}{2}PC = \sqrt{6}$

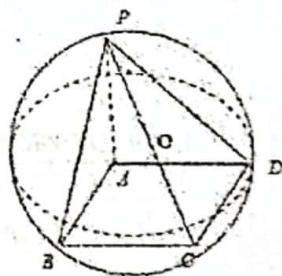
球 O 的表面积: $S = 4\pi R^2 = 24\pi$. 故答案为: 24π

16. 【详解】①: 由 $mx - y - m + 3 = 0 \Rightarrow m(x-1) + (3-y) = 0$,

有 $\begin{cases} x-1=0 \\ 3-y=0 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=3$, 所以直线过的定点为 $(1,3)$, 故①正确;

②: 由圆的标准方程可得圆心为 $C(2,4)$, 半径 $r = \sqrt{3}$, 直线 l_2 过的定点为 $B(1,3)$, 当 $l_2 \perp CB$ 时所得弦长最短, 则 $k_{l_2} \cdot k_{CB} = -1$, 又 $k_{l_2} = m$, $k_{CB} = 1$, 所以 $m = -1$, 得

$l_2: x + y - 4 = 0$, 则圆心到直线 l_2 的距离为 $d = \frac{|2+4-4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以弦长为: $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2$, 故②正确;



③: 当 $m=0$ 时, $l_1: x=0$, $l_2: y=3$, 则点 $P(0,3)$, 此时点 P 在圆 C 外;

当 $m \neq 0$ 时, 由直线 l_1 得 $m = -\frac{x}{y}$, 代入直线 l_2 中得点 P 的方程为

$$\text{圆 } N: (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2}, \text{ 得 } N(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \text{ 半径为 } R = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

所以圆心距 $NC = \frac{\sqrt{34}}{2} < \sqrt{3} + \frac{\sqrt{10}}{2} = r + R$, 所以两圆相交. 故③正确:

④: 由 $l_1: x + my = 0 \Rightarrow A(0,0)$. 当 $m=0$ 时, $l_1: x=0$, $l_2: y=3$, 有 $l_1 \perp l_2$,

当 $m \neq 0$ 时, $k_{l_1} = -\frac{1}{m}$, $k_{l_2} = m$, 则 $k_{l_1} k_{l_2} = -1$, 所以 $l_1 \perp l_2$,

又点 P 是两直线的交点, 所以 $PA \perp PB$, 所以 $|PA|^2 + |PB|^2 = |AB|^2 = 10$,

设 $\angle ABP = \theta$, 则 $|PA| = \sqrt{10} \sin \theta$, $|PB| = \sqrt{10} \cos \theta$, 因为 $|PA| \geq 0$, $|PB| \geq 0$, 所以 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

所以 $|PA| + |PB| = \sqrt{10}(\sin \theta + \cos \theta) = 2\sqrt{5} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq 2\sqrt{5}$, 故④错误. 故选: ①②③.

17. 【答案】(1) 证明见解析; (2) $S_n = 2 \ln(n+1)$

【详解】(1) 法 1: 由 $na_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1)$,

两边同除以 $n(n+1)$ 得, $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1$, $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1$ ($n \geq 1$) 为常数,

$\therefore$ 数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 为等差数列, 首项 $\frac{a_1}{1} = 1$, 公差为 1,

法 2: 由 $na_{n+1} = (n+1)a_n + n(n+1)$ 得 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + (n+1)$,

$\therefore \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \left(\frac{a_n}{n} + 1\right) - \frac{a_n}{n} = 1$ ($n \geq 1$) 为常数,

$\therefore$ 数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 为等差数列, 首项 $\frac{a_1}{1} = 1$, 公差为 1.

(2) 由 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} + (n-1) \times 1 = n$, $\therefore a_n = n^2$,

法 1: $b_n = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln \frac{(n+1)^2}{n^2}$,

则 $S_n = \ln \frac{2^2}{1^2} + \ln \frac{3^2}{2^2} + \dots + \ln \frac{(n+1)^2}{n^2} = 2 \ln \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n+1}{n} \right) = 2 \ln(n+1)$.

法 2: $b_n = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln \frac{(n+1)^2}{n^2} = \ln(n+1)^2 - \ln n^2$,

则 $S_n = (\ln 2^2 - \ln 1^2) + (\ln 3^2 - \ln 2^2) + \dots + [\ln(n+1)^2 - \ln n^2] = \ln(n+1)^2 - \ln 1^2 = 2 \ln(n+1)$.

18. 【解析】(1) 由正弦定理知: $2\sin B \cos C = 2\sin A + \sin C$

又: $\sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$, 代入上式可得: $2\cos B \sin C + \sin C = 0$

$C \in (0, \pi)$, 则 $\sin C > 0$, 故有: $\cos B = -\frac{1}{2}$, 又 $B \in (0, \pi)$, 则 $B = \frac{2\pi}{3}$

故 $\angle B$ 的大小为: $\frac{2\pi}{3}$

(2) 若选①: 由 BD 平分 $\angle ABC$ 得: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$

则有: $\frac{1}{2}ac \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 1 \times c \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times a \sin \frac{\pi}{3}$, 即 $ac = a + c$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{2\pi}{3}$

又 $b = 2\sqrt{3}$, 则有: $a^2 + c^2 + ac = 12$, 联立 $\begin{cases} ac = a + c \\ a^2 + c^2 + ac = 12 \end{cases}$, 可得: $(ac)^2 - ac - 12 = 0$,

解得: $ac = 4$ ($ac = -3$ 舍去), 故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

若选②: 可得: $\vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$, $BD^2 = \frac{1}{4}(\vec{BA} + \vec{BC})^2 = \frac{1}{4}(\vec{BA}^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{BC}^2)$

$= \frac{1}{4}(c^2 + 2ac \cos \frac{2\pi}{3} + a^2)$, 可得: $a^2 + c^2 - ac = 4$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{2\pi}{3}$, 即 $a^2 + c^2 + ac = 12$

联立 $\begin{cases} a^2 + c^2 - ac = 4 \\ a^2 + c^2 + ac = 12 \end{cases}$, 解得: $ac = 4$, 故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

19. 【解析】(1) 记 $x' = x - 12$, $y' = y - 86$, 将统计的最后三组数据进行处理得到下表,

x'	-1	0	1
y'	-1	0	4

此时 $\bar{x}' = \frac{-1+0+1}{3} = 0$, $\bar{y}' = \frac{-1+0+4}{3} = 1$, $\hat{b} = \frac{1+4-3 \times 0 \times 1}{1+1-3 \times 0} = \frac{5}{2}$, $\hat{a} = \bar{y}' - \hat{b} \cdot \bar{x}' = 1 - \frac{5}{2} \times 0 = 1$,

所以 $\hat{y} - 86 = \frac{5}{2}(x - 12) + 1$, 故 $\hat{y} = \frac{5}{2}x + 57$;

(2) 当 $x = 8$ 时, $\hat{y} = 77$, $79 - 77 = 2 \leq 2$, 当 $x = 10$ 时, $\hat{y} = 82$, $82 - 81 = 1 < 2$.

所以 (1) 中得到的线性回归方程是可靠的;

(3) 当 $x = 9$ 时, $\hat{y} = 79.5$, 此时发芽率 $n\% = 79.5\%$, 即 $n = 79.5$.

因为该农场有土地 10 万公顷, 所以估计该农场种植小麦的收益为 $79.5 \times 150 \times 10 = 119250$ (万元).

20. 【解析】(1) 由题意得 $c = \sqrt{3}$. 又点 $C(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 在椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上, 所以 $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$,

且 $a^2 - b^2 = 3$, 所以 $a = 2$, $b = 1$, 故椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

设点 $P(x, y)$, 由 $A(\sqrt{3}, 0)$, $B(-\sqrt{3}, 0)$ 得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2 - 3 + y^2 = x^2 - 3 + 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} - 2$.

又 $x \in [-2, 2]$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in [-2, 1]$.

(2) 设过点 B 且斜率为 k 的直线方程为 $y = k(x + \sqrt{3})$.

联立椭圆 M 方程得 $(1 + 4k^2)x^2 - 8\sqrt{3}k^2x + 12k^2 - 4 = 0$.

设两点 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 故 $x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{12k^2 - 4}{1 + 4k^2}$.

因为 $k_1 + k_2 = \frac{y_1 - \frac{1}{2}}{x_1 - \sqrt{3}} + \frac{y_2 - \frac{1}{2}}{x_2 - \sqrt{3}} = \frac{(y_1x_2 + x_1y_2) - \sqrt{3}(y_1 + y_2) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \sqrt{3}}{x_1x_2 - \sqrt{3}(x_1 + x_2) + 3}$,

其中 $y_1x_2 + x_1y_2 = 2kx_1x_2 - \sqrt{3}k(x_1 + x_2) = \frac{-8k}{1 + 4k^2}$, $y_1 + y_2 = \frac{-2\sqrt{3}k}{1 + 4k^2}$,

故 $k_1 + k_2 = \frac{\frac{-8k}{1 + 4k^2} + \frac{6k}{1 + 4k^2} - \frac{4\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2} + \sqrt{3}}{\frac{12k^2 - 4}{1 + 4k^2} - \frac{24k^2}{1 + 4k^2} + 3} = 2k - \sqrt{3}$, 所以 $k_1 + k_2 - 2k = -\sqrt{3}$ 为定值.

21. 【解析】(1) 由题意知: $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \ln x + \frac{m}{x} + 1$,

令 $g(x) = f'(x) = \ln x + \frac{m}{x} + 1$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} = \frac{x - m}{x^2}$;

当 $m \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$ 恒成立, $\therefore f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $m > 0$ 时, 若 $x \in (0, m)$, $g'(x) < 0$; 若 $x \in (m, +\infty)$, $g'(x) > 0$;

$\therefore f'(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递减, 在 $(m, +\infty)$ 上单调递增;

综上所述: 当 $m \leq 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $m > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递减, 在 $(m, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由 (1) 知: $\ln x + \frac{m}{x} + 1 > \frac{m}{3} + 2$ 对 $\forall x > 1$ 恒成立, 即 $\ln x + \frac{m}{x} - \frac{m}{3} - 1 > 0$ 对 $\forall x > 1$ 恒成立;

令 $h(x) = \ln x + \frac{m}{x} - \frac{m}{3} - 1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} = \frac{x - m}{x^2}$;

① 当 $m \leq 0$ 且 $m \in \mathbb{Z}$ 时, $h'(x) > 0$, $\therefore h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore h(x) > h(1) = \frac{2m}{3} - 1 \geq 0$, 解得: $m \geq \frac{3}{2}$ (舍);

②当 $0 < m \leq 1$ 且 $m \in \mathbb{Z}$, 即 $m = 1$ 时, $h(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{5}{6} < 0$, 不合题意;

③当 $m > 1$ 且 $m \in \mathbb{Z}$ 时, 若 $x \in (1, m)$, $h'(x) < 0$; 若 $x \in (m, +\infty)$, $h'(x) > 0$;

$\therefore h(x)$ 在 $(1, m)$ 上单调递减, 在 $(m, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore h(x)_{\min} = h(m) = \ln m - \frac{m}{3} \geq 0$;

令 $F(m) = \ln m - \frac{m}{3}$, 则 $F'(m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{3-m}{3m}$;

$\therefore$ 当 $m \in (1, 3)$ 时, $F'(m) > 0$; 当 $m \in (3, +\infty)$ 时, $F'(m) < 0$;

$\therefore F(m)$ 在 $(1, 3)$ 上单调递增, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递减;

又 $F(2) = \ln 2 - \frac{2}{3} > 0$, $F(3) = \ln 3 - 1 > 0$, $F(4) = \ln 4 - \frac{4}{3} = 2\ln 2 - \frac{4}{3} > 0$, $F(5) = \ln 5 - \frac{5}{3} < 0$,

$\therefore$ 满足 $F(m) \geq 0$ 且 $m > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ 的所有整数为 2, 3, 4;

综上所述: m 的所有值为 2, 3, 4.

22. 【解析】(1) 将直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ 中的参数 t 消去, 得 $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$;

$\rho^2 = \frac{6}{2 + \sin^2 \theta}$ 即为 $12\rho^2 + (\rho \sin \theta)^2 = 6$,

把 $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho \sin \theta = y$ 代入, 得 $2(x^2 + y^2) + y^2 = 6$,

即曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

所以直线 l : $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$, C : $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$;

(2) 易知点 $M(2, 0)$ 在直线 l 上, 把直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ (t 为参数),

代入 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, 整理得 $9t^2 + 16\sqrt{3}t + 8 = 0$. $\Delta = (16\sqrt{3})^2 - 4 \times 9 \times 8 > 0$,

设直线 l 与曲线 C 的交点 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

则 $t_1 + t_2 = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$, $t_1 t_2 = \frac{8}{9}$, 得 t_1, t_2 同号,

所以 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{|t_1 + t_2|}{|t_1 t_2|} = 2\sqrt{3}$.

23. 【解析】(1) $\because a+b=2$, 则 $b=2-a>0$, 可得 $0<a<2$.

$$\therefore (a+2)^2 + (b+1)^2 = (a+2)^2 + (3-a)^2 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}.$$

又 $\because y = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$ 开口向上, 对称轴为 $a = \frac{1}{2}$.

$$\therefore \text{当 } a = \frac{1}{2} \text{ 时, } 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} = \frac{25}{2}; \text{ 当 } a = 2 \text{ 时, } 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} = 17.$$

$$\text{故 } \frac{25}{2} \leq (a+2)^2 + (b+1)^2 < 17.$$

$$(2) \because (\sqrt{a+3} + \sqrt{b+3})^2 \leq 2[(\sqrt{a+3})^2 + (\sqrt{b+3})^2] = 2(a+b+6) = 16,$$

当且仅当 $\sqrt{a+3} = \sqrt{b+3}$, 即 $a=b=1$ 时等号成立;

$$\therefore \sqrt{a+3} + \sqrt{b+3} \leq 4,$$

$$\text{又 } \because |3x+m+1| + |3x-m-1| \geq |(3x+m+1) - (3x-m-1)| = 2|m+1|,$$

当且仅当 $(3x+m+1)(3x-m-1) \leq 0$ 时等号成立,

$$\therefore 2|m+1| \geq 4, \text{ 解得 } m \geq 1 \text{ 或 } m \leq -3.$$

故 m 的取值范围为 $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.