

绵阳南山中学高 2020 级高三下期入学考试

数学试题(理工类)

命题人：刘盟 审题人：蔡晓军

(时间：120 分钟 分数：150 分)

本试卷分为试题卷和答题卷两部分，其中试题卷由第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）组成，共 5 页。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上，并把对应的准考证号用 2B 铅笔涂黑。
2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案；答案不能答在试题卷上。

第 I 卷（选择题，共 60 分）

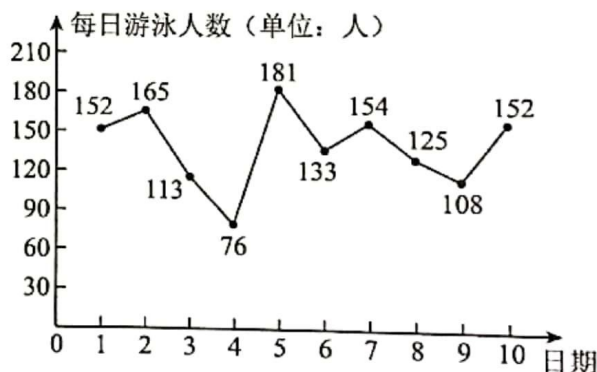
一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z-i = \frac{4+3i}{i}$ ，则 $z =$ ()

- A. $3-3i$ B. $3+3i$ C. $-3+3i$ D. $-3-3i$

2. 某游泳馆统计了 10 天内某小区居民每日到该游泳馆锻炼的人数，整理数据，得到如下所示的折线图。则根据此折线图，下面结论正确的是 ()

- A. 这 10 天内，每日游泳人数的极差大于 106
B. 这 10 天内，每日游泳人数的平均值大于 135
C. 这 10 天内，每日游泳人数的中位数大于 145
D. 前 5 天每日游泳人数的方差小于后 5 天每日游泳人数的方差



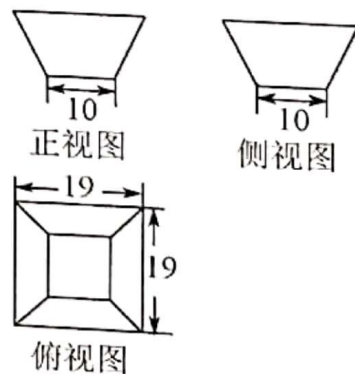
3. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x | x \leq 3, x \in N\}$,

则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-1, 3]$ B. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3\}$

4. 中国的计量单位可追溯到 4000 多年前的氏族社会末期，秦王统一中国后，颁布了统一度量衡的诏书并制发了成套的权衡和容量标准器，如图是当时的一种度量工具“斗”（无盖，不计厚度）的三视图（正视图和侧视图都是等腰梯形），若此“斗”的体积约为 2000 立方厘米，则其高约为 ()（单位：厘米）

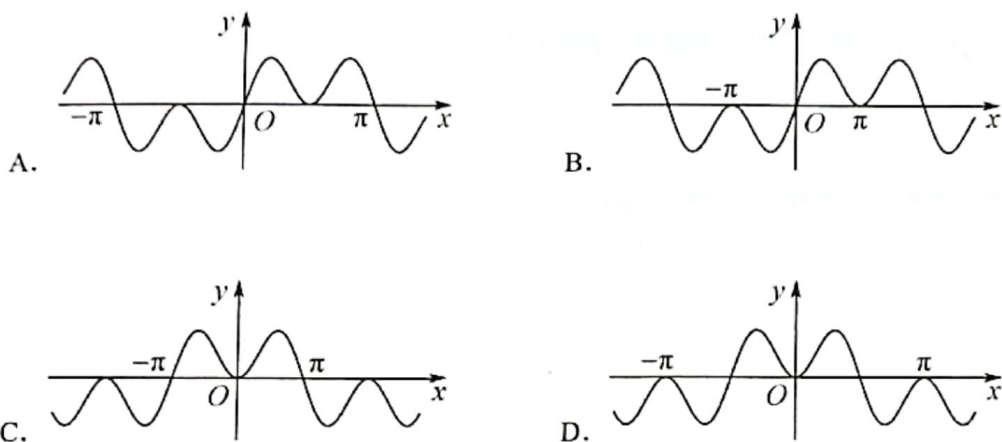
- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12



5. 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边经过点 $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. 函数 $f(x) = \cos x - \cos^3 x$ 的图像大致为 ()



7. “杨辉三角”是中国古代数学文化的瑰宝之一, 最早出现在中国南宋数学家杨辉于 1261 年所著的《详解九章算法》一书中. 如图, 若在“杨辉三角”中从第 2 行右边的 1 开始按“锯齿形”排列的箭头所指的数依次构成一个数列: 1, 2, 3, 3, 6, 4, 10,

5, ..., 则此数列的前 20 项的和为 ()

- A. 350 B. 295
C. 285 D. 230

第1行		1	1			
第2行		1	2	←1		
第3行		1	3	←3	1	
第4行	1	4	←6	4	1	
第5行	1	5	←10	10	5	1
.....						

8. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 是奇函数且满足 $f\left(\frac{3}{2}-x\right) = f(x)$, $f(-2) = -3$, 则

$f(2022) + f(2023) + f(2024) =$ ()

- A. -2 B. 0 C. 2 D. 3

9. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个长度单位, 得函数 $g(x)$ 图象, 则以下结论中正确的是 ()

- A. $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ B. $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 对称
C. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{16}$ 对称 D. $g(x)$ 在区间 $\left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ 上单调递增

10. 4 张卡片的正、反面分别写有数字 1, 2; 1, 3; 4, 5; 6, 7. 将这 4 张卡片排成一排, 可构成不同的四位数的个数为 ()

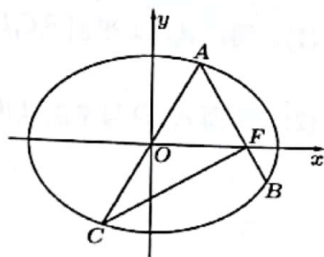
- A. 288 B. 336 C. 368 D. 412

11. 如图所示, 点 F 是椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, A, C 是椭圆上关于原点 O 对称的两点, 直线 AF 与椭圆的另一个交点为 B , 若 $AF \perp FC, |AF| = 2|BF|$, 则椭圆 M 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}-1$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

12. 已知 $a = \ln 1.5, b = \frac{1}{3}, c = \cos 1.25$, 则大小关系正确的为 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $c > a > b$



第II卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (1, 1)$, 若 $\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$, 且 $\vec{b} \perp \vec{c}$, 则实数 $k =$ _____.

14. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的两个焦点, 以线段 F_1F_2 为直径的圆与双曲线的渐近线在第一象限交于点 M , 则 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 _____.

15. 从正四面体的顶点及其棱的中点共 10 个点中, 任取 3 个点, 则这三个点构成的三角形为等边三角形的概率为 _____.

16. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上, $PB = PC, \angle PAB = 90^\circ, \triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形, $\triangle PBC$ 的面积为 $5\sqrt{3}$, 则球 O 的体积为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17-21 题为必考题, 每个试题考生必须作答, 第 22-23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: (本大题共 5 个小题, 共 60 分.)

17. 已知数列 $\{a_n\} (a_n > 0)$, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_n^2 + a_n = 2S_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = 2^{a_n}, T_n = (3a_n - 1)b_1 + (3a_{n-1} - 1)b_2 + \cdots + (3a_1 - 1)b_n$, 求 T_n 的值.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且满足 $\frac{2\cos B}{ac} = \frac{\cos A}{ab} + \frac{\cos C}{bc}$.

(1) 求 B ;

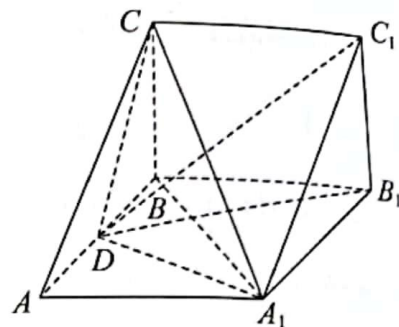
(2) 若 $b = \sqrt{6}$, BD 是 AC 边上的高, 求 BD 的最大值.

19.如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , D 为线段 AB 的中点, $CB=4$, $AB=4\sqrt{3}$, $A_1C_1=8$,

三棱锥 $A-A_1DC$ 的体积为 8.

(1)证明: $A_1D \perp$ 平面 B_1C_1D ;

(2)求平面 A_1CD 与平面 A_1BC 夹角的余弦值.



20. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到准线的距离为 1.

(1)求抛物线 C 的标准方程;

(2)设点 $P(t, 1)$ 是该抛物线上一定点, 过点 P 作圆 $O: (x-2)^2 + y^2 = r^2$ (其中 $0 < r < 1$) 的两条切线分别交抛物线 C 于点 A, B , 连接 AB . 探究: 直线 AB 是否过一定点, 若过, 求出该定点坐标; 若经过定点, 请说明理由.

21. 已知函数 $f(x) = 2x - \frac{2}{x} - a \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 且 $x_1 \in (1, e]$ (e 为自然对数底数, 且 $e = 2.71828 \dots$), 求 $f(x_1) - f(x_2)$ 的取值范围.

(二) 选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

【选修 4-4：坐标系与参数方程】(本题 10 分)

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \end{cases}$ (t 为参数)，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos\theta \\ y=\frac{3}{2}\sin\theta \end{cases}$

(θ 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系。

(1) 求曲线 C_1 与曲线 C_2 的极坐标方程；

(2) 曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A, B 两点，求 $|OA|^2 + |OB|^2$ 的值。

【选修 4-5：不等式选讲】(本题 10 分)

23. 已知函数 $f(x) = |x+2| + 2|x-t|$ ($t > 0$)，若函数 $f(x)$ 的最小值为 5。

(1) 求 t 的值；

(2) 若 a, b, c 均为正实数，且 $2a+b+c=t$ ，求 $\frac{1}{2a} + \frac{4}{b} + \frac{1}{c}$ 的最小值。