

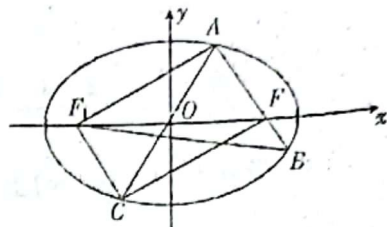
绵阳南山中学 2020 级高三下期入学考试参考答案

1. A. 2. B. 3. C 4. A 5. C 6. D 7. C 8. B 9. D 10. B 11. D 12. A

11. 【详解】如图，作 F_1 为椭圆 M 的左焦点，连接 AF_1, CF_1, BF_1 ，设 $|AF_1| = x$ ，则 $|BF_1| = \frac{x}{2}$ ， $|CF_1| = 2a - x$ ，

$BF_1 = 2a - \frac{x}{2}$ ，因为 A, C 是椭圆上关于原点 O 对称的两点，直线 AF 与椭圆的另一个交点为 B ， $AF \perp FC$

所以 $AF \perp AF_1$ 所以 $\begin{cases} (2a-x)^2 + x^2 = 4c^2, \\ (2a-x)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = \left(2a - \frac{x}{2}\right)^2, \end{cases}$ 可得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，故选：D



12. A【详解】因为 $0 < \frac{\pi}{2} - 1.25 < \frac{\pi}{2}$ ， $0 < \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $c = \cos 1.25 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1.25\right)$ ，

由于 $\frac{\pi}{2} = \frac{6\pi}{12} < \frac{1}{3} + 1.25 = \frac{1}{3} + \frac{5}{4} = \frac{19}{12}$ ，故 $\frac{\pi}{2} - 1.25 < \frac{1}{3}$ ，故 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 1.25\right) < \sin \frac{1}{3}$ ，

设 $u(x) = \sin x - x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，则 $u'(x) = \cos x - 1 < 0, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，即 $u(x) = \sin x - x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减，故

$u(x) < u(0) = 0$ ，即 $\sin x < x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，故 $\sin \frac{1}{3} < \frac{1}{3}$ ，即 $c < b$ ； $a = \ln 1.5, b = \frac{1}{3} = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1.5-1}{1.5}$ ，令 $f(x) = \ln x$ ，

$g(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ ，令 $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}, x > 0$ ，则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}, x > 0$ ，

当 $0 < x < 1$ 时， $h'(x) < 0, h(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减，当 $x > 1$ 时， $h'(x) > 0, h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 递增，所以 $h(x) \geq h(1) = 0$ ，

即 $f(x) \geq g(x)$ （当且仅当 $x=1$ 时等号成立）， $\therefore f(1.5) > g(1.5)$ ，即 $\ln 1.5 > \frac{1.5-1}{1.5} = \frac{1}{3}$ ，即 $a > b$ ， $\therefore a > b > c$ ，

13. $-\frac{3}{2}$ 14. 2 15. $\frac{1}{5}$ 16. $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$

16. 【详解】解：取 BC 的中点 D ，连接 $PD, AD, PB = PC, PD \perp BC$ ， $\triangle PBC$ 的面积为 $5\sqrt{3}$ ，

则 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times PD = 5\sqrt{3}$ ，解得 $PD = 5$ ， $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = 3$ ， $PB = \sqrt{PD^2 + BD^2} = 2\sqrt{7}$ ，又 $\angle PAB = 90^\circ$ ，

$PA = \sqrt{PB^2 - AB^2} = 4$ ，所以 $PA^2 + AD^2 = PD^2$ ，即 $PA \perp AD$ ，又 $PA \perp AB, AB \cap AD = A, AB, AD \subset$ 平面 ABC ，

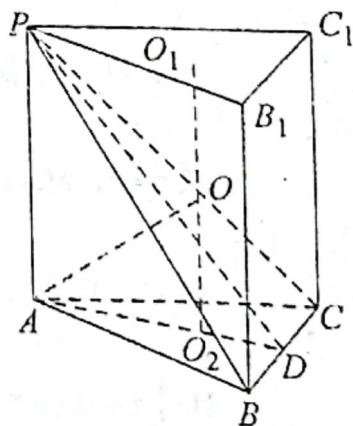
可得 $PA \perp$ 平面 ABC ，将三棱锥 $P-ABC$ 补成正三棱柱 PB_1C_1-ABC ，

三棱锥 $P-ABC$ 的外接球即正三棱柱的外接球，

外接球的球心 O 为上、下底面的外接圆圆心的连线 O_1O_2 的中点，连接 AO_2, AO ，

设外接球的半径为 R ，下底面外接圆的半径为 $r, r = AO_2 = \frac{2}{3} AD = 2$ ，则 $R^2 = r^2 + 4 = 8$ ，

所以 $R = 2\sqrt{2}$ ，所求外接球的体积为 $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$ ；故答案为： $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$



17. 【详解】解：(1) 由 $a_n^2 + a_n = 2S_n$ ①， $\therefore a_{n+1}^2 + a_{n+1} = 2S_{n+1}$ ②；

②减①即得: $(a_{n+1} + a_n) = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n)$. 由 $a_n > 0$, 可得 $a_{n+1} - a_n = 1$.

当 $n=1$ 时, $a_1^2 + a_1 = 2a_1$, 解得 $a_1 = 0$ (舍去) 或 $a_1 = 1$.

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 通项公式为 $a_n = n$.

(2) 由 (1) 可知 $b_n = 2^n = 2^n \therefore T_n = (3n-1) \cdot 2 + (3n-4) \cdot 2^2 + \dots + 2 \cdot 2^n$ ①

$$2T_n = (3n-1) \cdot 2^2 + (3n-4) \cdot 2^3 + \dots + 2 \cdot 2^{n+1} \quad ②$$

$$②-① \therefore T_n = -(3n-1) \cdot 2 + 3(2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) + 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2} - (3n-1) \cdot 2 + 3 \cdot \frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1} = 10 \cdot 2^n - 2(3n-1) - 12$$

$$T_n = 10 \cdot 2^n - 2(3n-1) - 12$$

18. 【详解】(1) 解: 因为 $\frac{2\cos B}{ac} = \frac{\cos A}{ab} + \frac{\cos C}{bc}$, 所以 $2b\cos B = c\cos A + a\cos C$,

由正弦定理可得 $2\sin B \cos B = \sin C \cos A + \sin A \cos C$, 即 $2\sin B \cos B = \sin(C+A) = \sin B$,

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B > 0$, 所以 $\cos B = \frac{1}{2}$, 则 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 解: 因为 $b = \sqrt{6}$, $B = \frac{\pi}{3}$, 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 即 $6 = a^2 + c^2 - ac$,

所以 $a^2 + c^2 = 6 + ac \geq 2ac$ 当且仅当 $a = c$ 时取等号,

所以 $ac \leq 6$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 当且仅当 $a = c = \sqrt{6}$ 时取等号, 所以 $(S_{\triangle ABC})_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, 所以 $BD = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AC} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{\sqrt{6}} \leq \frac{2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 故 BD 的最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

19. 【详解】(1) 证明: 因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $CB \subset$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp CB$,

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 四边形 AA_1C_1C 为平行四边形, 则 $AC = A_1C_1 = 8$,

因为 $AB = 4\sqrt{3}$, $CB = 4$, 所以 $AB^2 + CB^2 = AC^2$, 所以 $CB \perp AB$,

又因为 $AB \cap AA_1 = A$, $AA_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 , $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $CB \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

因为 $CB \parallel C_1B_1$, 所以 $C_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

又 $A_1D \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $C_1B_1 \perp A_1D$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = 8\sqrt{3}$,

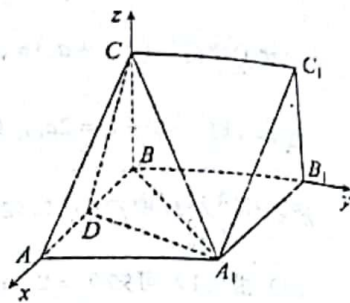
$\therefore D$ 为 AB 的中点, 则 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}$, 因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,

$$V_{A-ACD} = V_{A_1-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times AA_1 = 8,$$

所以 $AA_1 = 2\sqrt{3}$, 所以在 $\triangle A_1DB_1$ 中, $A_1D = B_1D = 2\sqrt{6}$, $A_1B_1 = 4\sqrt{3}$,

所以 $A_1D^2 + B_1D^2 = A_1B_1^2$, 所以 $A_1D \perp B_1D$, $C_1B_1 \cap B_1D = B_1$,

$C_1B_1, B_1D \subset$ 平面 B_1C_1D , 所以 $A_1D \perp$ 平面 B_1C_1D ;



(2) 因为 $BB_1 \perp$ 平面 ABC , $BC \perp AB$, 以点 B 为坐标原点,

BA, BB_1, BC 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系,

则 $C(0,0,4), D(2\sqrt{3},0,0), A_1(4\sqrt{3},2\sqrt{3},0), B_1(0,2\sqrt{3},0)$,

设平面 DA_1C 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{DA_1} = (2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 0)$, $\vec{DC} = (-2\sqrt{3}, 0, 4)$, 则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{DA_1} = 2\sqrt{3}x_1 + 2\sqrt{3}y_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{DC} = -2\sqrt{3}x_1 + 4z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x_1 = 2, \text{ 可得 } \vec{m} = (2, -2, \sqrt{3}),$$

设平面 A_1CB 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{BA_1} = (4\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 0)$, $\vec{BC} = (0, 0, 4)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BA_1} = 4\sqrt{3}x_2 + 2\sqrt{3}y_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC} = 4z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x_2 = 1, \text{ 可得 } \vec{n} = (1, -2, 0),$$

所以, $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{11} \times \sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{55}}{55}$, 所以平面 DA_1C 与平面 A_1CB 夹角的余弦值为 $\frac{6\sqrt{55}}{55}$.

20. 【详解】(1) 因为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到准线的距离是 1, 所以 $p = 1$, 标准方程为 $y^2 = 2x$.

(2) 当 $y = 1$ 时, $x = \frac{1}{2}$, 所以 $P(\frac{1}{2}, 1)$, 设 $A(2a^2, 2a), B(2b^2, 2b)$,

则直线 AB 为 $y - 2a = \frac{1}{a+b}(x - 2a^2)$, 即 $x - (a+b)y + 2ab = 0$.

因为直线 $PA: x - (a + \frac{1}{2})y + a = 0$ 与圆 $O: (x-2)^2 + y^2 = r^2$ 相切,

$$\text{所以 } \frac{|a+2|}{\sqrt{1 + (a + \frac{1}{2})^2}} = r, \text{ 整理得 } (r^2 - 1)a^2 + (r^2 - 4)a + \frac{5}{4}r^2 - 4 = 0.$$

同理, 直线 PB 与圆 $O: (x-2)^2 + y^2 = r^2$ 相切, 可得 $(r^2 - 1)b^2 + (r^2 - 4)b + \frac{5}{4}r^2 - 4 = 0$.

所以可得 a, b 是方程 $(r^2 - 1)x^2 + (r^2 - 4)x + \frac{5}{4}r^2 - 4 = 0$ 的两个根,

所以 $a+b = \frac{4-r^2}{r^2-1}$, $ab = \frac{\frac{5}{4}r^2-4}{r^2-1}$, 代入 $x-(a+b)y+2ab=0$, 化简得 $(x+y+\frac{5}{2})r^2-x-4y-8=0$,

若直线过定点, 则须满足 $\begin{cases} x+y+\frac{5}{2}=0 \\ -x-4y-8=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{11}{6} \end{cases}$ 所以直线 AB 恒过定点 $(-\frac{2}{3}, -\frac{11}{6})$.

21. 【详解】(1) 解: 当 $a=1$ 时 $f(x)=2x-\frac{2}{x}-\ln x$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{又 } f'(x)=2+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x+2}{x^2}=\frac{2(x-\frac{1}{4})^2+\frac{15}{8}}{x^2}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间.

(2) 解: 由题知, $f(x)=2x-\frac{2}{x}-a\ln x$, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=2+\frac{2}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-ax+2}{x^2}$,

当 $a \leq 0$ 时, 对任意的 $x > 0$, $f'(x) > 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 没有极值点;

当 $0 < a \leq 4$ 时, $\Delta = a^2 - 16 \leq 0$, $f'(x) \geq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为零,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 没有极值点;

当 $a > 4$ 时, 令 $f'(x)=0$, 解得 $x_1 = \frac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}$, $x_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}$, 则 $x_1 > x_2 > 0$,

当 $x \in (0, x_2)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (x_2, x_1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

此时函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{a-\sqrt{a^2-16}}{4})$, $(\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}, +\infty)$,

单调递减区间为 $(\frac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}, \frac{a+\sqrt{a^2-16}}{4})$.

综上, 当 $a > 4$ 时, $f(x)$ 有两极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1+x_2 = \frac{a}{2}$, $x_1x_2 = 1$,

所以 $f(x_1)-f(x_2) = 2x_1 - \frac{2}{x_1} - a\ln x_1 - (2x_2 - \frac{2}{x_2} - a\ln x_2) = 4(x_1 - \frac{1}{x_1}) - a\ln \frac{x_1}{x_2} = 4(x_1 - \frac{1}{x_1}) - 4(x_1 + \frac{1}{x_1})\ln x_1$,

设 $x_1 = t$, $h(t) = 4(t - \frac{1}{t}) - 4(t + \frac{1}{t})\ln t$, 其中 $t \in (1, e]$,

所以 $h'(t) = 4(1 + \frac{1}{t^2}) - 4[(1 - \frac{1}{t^2})\ln t + (t + \frac{1}{t}) \cdot \frac{1}{t}] = \frac{4(1-t^2)\ln t}{t^2}$, 又因为 $t \in (1, e]$, 可知 $h'(t) < 0$, 所以 $h(t)$ 在

$(1, e]$ 上单调递减. $\therefore h(1) > h(t) \geq h(e)$, 即 $-\frac{8}{e} \leq h(t) < 0$, 所以 $f(x_1)-f(x_2)$ 的取值范围为 $[-\frac{8}{e}, 0)$.

22. (1) 解: 由题意得: 由 C_1 , $\begin{cases} x=1+t, \\ y=t, \end{cases}$ (t 为参数), 消去 t 得:

$x-y-1=0$ 故 C_1 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta - \rho \sin \theta - 1 = 0$

由 C_2 : $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos \theta, \\ y = \frac{3}{2} \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数), 消去 θ 得: $x^2 + y^2 - 3x = 0$, 故 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 3 \cos \theta$

(2) 设 $A(\rho_1, \theta)$, $B(\rho_2, \theta)$: 联立 $\begin{cases} \rho \cos \theta - \rho \sin \theta - 1 = 0 \\ \rho = 3 \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{9} \rho^4 - \frac{5}{3} \rho^2 - 1 = 0$

所以 $\rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{15}{2}$ 故 $|OA|^2 + |OB|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{15}{2}$

23. 【详解】(1) 因为 $t > 0$, 所以 $f(x) = |x+2| + 2|x-t| = \begin{cases} -(x+2) - 2(x-t), & x < -2 \\ (x+2) - 2(x-t), & -2 \leq x < t \\ (x+2) + 2(x-t), & x \geq t \end{cases}$

即 $f(x) = \begin{cases} -3x+2t-2, & x < -2 \\ -x+2t+2, & -2 \leq x < t \\ 3x+2-2t, & x \geq t \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, t)$ 内单调递减, 在 $(t, +\infty)$ 内单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(t) = t+2$, 由题意, 得 $t+2=5$, 解得 $t=3$.

(2) 由 (1) 知, $2a+b+c=3$,

$$\frac{1}{2a} + \frac{4}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3} (2a+b+c) \left(\frac{1}{2a} + \frac{4}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{1}{3} \left(\sqrt{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{2}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2$$

$= \frac{1}{3} (1+2+1)^2 = \frac{16}{3}$, 当且仅当 $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{3}{4}$ 时取等号, 所以 $\frac{1}{2a} + \frac{4}{b} + \frac{1}{c}$ 的最小值为 $\frac{16}{3}$.