

2023 年 3 月

绵阳南山中学 2023 年春高三下期 3 月月考

数学试题(文科)

命题人：李若虚 审题人：郑 瑜

本试卷分为试题卷和答题卷两部分，其中试题卷由第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)组成，共 4 页；
答题卷共 6 页，满分 150 分。

第 I 卷(选择题，共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x | 1 \leq 2^x \leq 8, x \in \mathbb{Z}\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-1, 3]$ B. $\{0, 1\}$ C. $[0, 2]$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 下列复数在复平面上所对应的点落在单位圆上的是 ()

- A. $2i$ B. $3+4i$ C. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

3. 下列说法中正确的是 ()

- A. 命题“若 $am^2 < bm^2$, 则 $a < b$ ”的逆命题是真命题
 B. 命题“ p 或 q ”为真命题, 则命题 p 和命题 q 均为真命题
 C. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, e^{x_0} \leq x_0 + 1$ ”的否定为: “ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x + 1$ ”
 D. 直线 l 不在平面 α 内, 则“ l 上有两个不同的点到 α 的距离相等”是“ $l // \alpha$ ”的充要条件
 4. 向量 $m = (1, a)$, $n = (2, -2+a)$, 若 $(m+n) // m$, 则实数 $a =$ ()
 A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

5. 通过加强对野生动物栖息地的保护, 某濒危野生动物的数量不断增长, 根据调查研究, 该野生动物的

数量 $N(t) = \frac{K}{1 + e^{-0.12t - 0.88}}$ (t 的单位: 年), 其中 K 为栖息地所能承受该野生动物的最大数量。当

$N(t^*) = 0.9K$ 时, 该野生动物的濒危程度降到较为安全的级别, 此时 t^* 约为 $(\ln 9 \approx 2.20)$ ()

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

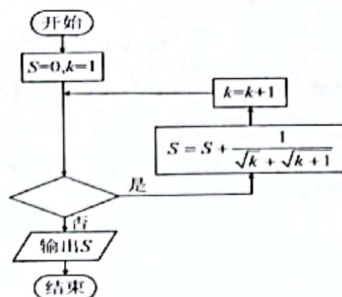
6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_9 = 45, a_{n-4} = 31$, 若 $S_n = 198$, 则 $n =$ ()

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

7. 执行如图所示的程序框图，若输出的 $S = 44$ ，
则判断框内应填入的条件为 ()

A. $k > 2025?$ B. $k \geq 2025?$

C. $k < 2025?$ D. $k \leq 2025?$



(7 题图)



(8 题图)

8. 剪纸艺术是中国最古老的民间艺术之一，作为一种镂空艺术，它能给人以视觉上的艺术享受。在如图所示的圆形图案中有 12 个树叶状图形（即图中阴影部分），构成树叶状图形的圆弧均相同，若在圆内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率是 ()

A. $4 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$ B. $2 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ D. $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$

9. 已知函数 $f(x) = -2\sin^2 2x$ ，现有如下说法：① $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq -1$ ；② $\exists \alpha \in (0, +\infty)$ ，函数

$f(x+\alpha)$ 的图象关于原点对称；③ 若 $\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2} \right| = 1$ ，则 $|x_1 - x_2|$ 的值可以为 $\frac{3\pi}{2}$ ；④ $\exists x_1$ ，

$x_2 \in \mathbb{R}$ ，若 $x_1 - x_2 = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，则 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 。则上述说法中，正确的个数为 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

10. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数， $g(x) = xf(x)$ ， $a = g(-\log_2 5.1)$ ， $b = g(2^{0.8})$ ， $c = g(3)$ ，则

a, b, c 的大小关系为 ()

A. $b < a < c$ B. $c < b < a$ C. $a < b < c$ D. $b < c < a$

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， P 是双曲线上一点， $\triangle PF_1F_2$ 是以 F_1P

为底边的等腰三角形，且 $\frac{\pi}{3} < \angle PF_2F_1 < \frac{2\pi}{3}$ ，则该双曲线的离心率的取值范围是 ()

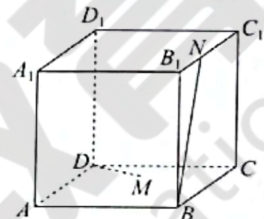
A. $(1, 2)$ B. $\left(1, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 2\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, +\infty\right)$

12. 已知函数 $f(x) = x \cdot e^{-x}$ ， $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x + a$ ，若 $\exists x_1, x_2 \in [1, 2]$ ，使得 $f(x_1) = g(x_2)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

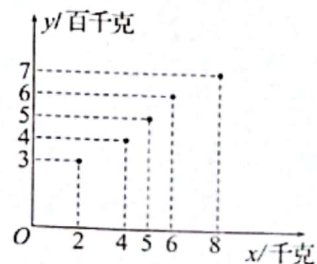
A. $\left(\frac{2}{e^2} + \ln 2 - 2, \frac{1}{e} - \frac{1}{2}\right)$ B. $\left[\frac{2}{e^2} + \ln 2 - 2, \frac{1}{e} - \frac{1}{2}\right]$ C. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}, \frac{2}{e^2} - \ln 2 + 2\right)$ D. $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{e}, \frac{2}{e^2} - \ln 2 + 2\right]$

第II卷(非选择题, 共90分)

二、填空题(本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

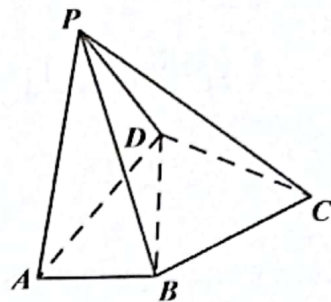
13. 已知直线 $l_1: ax + 2y + 6 = 0$ 和直线 $l_2: x + (a-1)y + a^2 - 1 = 0$ 垂直, 则实数 a 的值为_____.14. 实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} 2x - y + 1 \leq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \\ x + y + 3 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x^2 + y^2$ 的最小值为_____.15. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点, 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 则 $|AB| + |DE|$ 的最小值为_____.16. 如图, 若点 M 是棱长为 $3\sqrt{2}$ 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 的球面上的动点, 点 N 为棱 B_1C_1 上的一点, 且 $2NB_1 = NC_1$, $DM \perp BN$,则动 M 点的轨迹的长度为_____.

三、解答题:(共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17-21题为必考题, 每个试题考生必须作答, 第22-23题为选考题, 考生根据要求作答)

17. 已知 $\vec{m} = (\sqrt{3} \sin x, -1)$, $\vec{n} = (\cos x, \cos^2 x + \frac{1}{2})$, 设函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$.(1) 当 $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 时, 分别求函数 $f(x)$ 取得最大值和最小值时 x 的值;(2) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对应边分别是 a, b, c , 且 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 6$, $f(\frac{A}{2}) = -1$, 求 c 的值.18. 根据统计, 某蔬菜基地西红柿亩产量的增加量 y (百千克) 与某种液体肥料每亩的使用量 x (千克) 之间的对应数据的散点图如图所示.(1) 从散点图可以看出, 可用线性回归方程拟合 y 与 x 的关系, 请计算样本相关系数 r 并判断它们的相关程度;(2) 求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 并预测液体肥料每亩的使用量为 12 千克时西红柿亩产量的增加量.

$$\text{附: } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAD$ 和 $\triangle BCD$ 都是等边三角形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AD = 2AB = 4$, $BC = 2\sqrt{3}$.



(1) 求证: $CD \perp$ 平面 PAD ; (2) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中: ①已知点 $A(\sqrt{3}, 0)$, 直线 $l: x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 动点 P 满足到点 A 的距离与到直线 l 的距离之比 $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ②已知点 S, T 分别在 x 轴, y 轴上运动, 且 $|ST|=3$,

动点 P 满 $\vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{OS} + \frac{1}{3}\vec{OT}$; ③已知圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 直线 l 为圆 C 的切线, 记点

$A(\sqrt{3}, 0), B(-\sqrt{3}, 0)$ 到直线 l 的距离分别为 d_1, d_2 , 动点 P 满足 $|PA| = d_1, |PB| = d_2$.

(1) 在①, ②, ③这三个条件中任选一个, 求动点 P 的轨迹方程;

(2) 记 (1) 中动点 P 的轨迹为 E , 经过点 $D(1, 0)$ 的直线 l' 交 E 于 M, N 两点, 若线段 MN 的垂直平分线与 y 轴相交于点 Q , 求点 Q 纵坐标的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \left(\frac{1}{x} - 2\right)(a+1)$, $a \in \mathbb{R}$. (1) 试求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若不等式 $f(x) \geq a(\ln x - e^x)$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

选考题: (共 10 分, 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分)

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{2t-3}{t-1} \\ y = \frac{2}{t-1} \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C_2 的参数方程为

$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴, 建立极坐标系.

(1) 求 C_1 的普通方程和 C_2 的极坐标方程; (2) 求曲线 C_2 上的点到曲线 C_1 距离的最小值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |3x-3| - |x+1|$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值; (2) $\forall x \in \mathbb{R}$, 不等式 $f(x) > m + |2x+2|$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.