

## 绵阳南山中学 2023 年春 2020 级 3 月月考

## 数学试题(文科)答案

一、选择题：1—4. DCCB 5—8. CBCA 9—12. CADB

7. 由题意得：

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \sqrt{k+1}-1=44$$

解得  $k=2024$ ，即当  $k=2024$  时，满足判断框内的条件， $k=2025$  时，不满足判断框内的条件，结束运行，所以判断框内应填入的条件是“ $k < 2025?$ ”，故选：C.

8. 设圆的半径为  $r$ ，如图所示，12 片树叶是由 24 个相同的弓形组成，且弓形  $AmB$  的面积

$$\text{为 } S_{\text{弓形}} = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2.$$

$$\therefore \text{所求的概率为 } P = \frac{24S_{\text{弓形}}}{S_{\text{圆}}} = \frac{24\left(\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right)}{\pi r^2} = 4 - \frac{6\sqrt{3}}{\pi}. \text{ 故选 A.}$$

9. 函数  $f(x) = -2\sin^2 2x = -1 + \cos 4x$ . 对于①，令  $4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ，解得  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ；此时  $f(x) = -1$ ， $\therefore \exists x \in \mathbb{R}$ ， $f(x) \leq -1$ ，① 正确；

对于②， $f(x) = -1 + \cos 4x \in [-2, 0]$ ，结合函数的图象知， $\exists \alpha \in (0, +\infty)$ ，函数  $f(x+\alpha)$  的图象关于原点对称，错误；

对于③，若  $\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2} \right| = 1$ ，则  $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ ， $|x_1 - x_2|$  的值为  $n \cdot \frac{T}{2} = n \cdot \frac{\pi}{4}$ ， $n \in \mathbb{Z}$ 。

$\therefore$  可以为  $\frac{3\pi}{2}$ ，③ 正确；

对于④，当  $x_1 = 0$ ， $x_2 = \pi$  时， $x_1 - x_2 = -\pi$ ，满足  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ，④ 正确；

综上，正确的命题序号是①③④。故选 C.

10. 奇函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上是增函数，则当  $x > 0$  时， $f(x) > f(0) = 0$ ，且  $f'(x) > 0$ ，

$\therefore g(x) = xf(x)$ ，则  $g'(x) = f(x) + xf'(x) > 0$ ， $\therefore g(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增，且  $g(x) = xf(x)$  偶函数，

$\therefore a = g(-\log_2 5.1) = g(\log_2 5.1)$ ，则  $2 < \log_2 5.1 < 3$ ， $1 < 2^{0.8} < 2$ ，则  $g(2^{0.8}) < g(\log_2 5.1) < g(3)$ ，

$\therefore b < a < c$ ，故选：A.

$$11. |PF_1|^2 = |F_1F_2|^2 + |PF_2|^2 - 2|F_1F_2| \cdot |PF_2| \cos \angle PF_2F_1 = 4b^2 + 4c^2 - 2 \cdot 2c \cdot 2c \cos \angle PF_2F_1$$

$$= 8c^2(1 - \cos \angle PF_2F_1), \text{ 即 } |PF_1| = 2\sqrt{2}c \cdot \sqrt{1 - \cos \angle PF_2F_1}$$

$$\therefore 2a = ||PF_1| - |FF_1|| = |2\sqrt{2}c \cdot \sqrt{1 - \cos \angle PF_2F_1} - 2c|, \because 60^\circ < \angle PF_2F_1 < 120^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < \cos \angle PF_2F_1 < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < 1 - \cos \angle PF_2F_1 < \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{1 - \cos \angle PF_2F_1} < \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \therefore 0 < 2\sqrt{2}c \cdot \sqrt{1 - \cos \angle PF_2F_1} - 2c < (2\sqrt{3} - 2)c$$

$$\therefore 0 < 2a < (2\sqrt{3} - 2)c, \quad \therefore \frac{c}{a} > \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, \quad \therefore e \in \left( \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, +\infty \right), \text{ 故选: D.}$$

12. 因为函数  $f(x) = x \cdot e^{-x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x - a$

$$\therefore f'(x) = e^{-x}(1 - x) < 0, \quad f(x) \text{ 在区间 } [1, 2] \text{ 上是单调减函数, 所以 } f(x) \in \left[ \frac{2}{e^2}, \frac{1}{e} \right],$$

$$g'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} > 0, \quad g(x) \text{ 在区间 } [1, 2] \text{ 上是单调增函数, 所以 } g(x) \in \left[ \frac{1}{2} + a, 2 - \ln 2 + a \right],$$

由于  $\exists x_1, x_2 \in [1, 2]$  使得  $f(x_1) = g(x_2)$ , 所以  $\{y | y = f(x)\} \cap \{y | y = g(x)\} \neq \emptyset$

当  $\{y | y = f(x)\} \cap \{y | y = g(x)\} = \emptyset$  时,  $2 - \ln 2 + a < \frac{2}{e^2}$  或  $\frac{1}{e} < \frac{1}{2} + a$ , 解得  $a < \frac{2}{e^2} + \ln 2 - 2$

或  $a > \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$ . 所以当  $f(x) \cap g(x) \neq \emptyset$  时, 得  $a \in \left[ \frac{2}{e^2} + \ln 2 - 2, \frac{1}{e} - \frac{1}{2} \right]$ . 故选: B.

二、填空题:

13.  $\frac{2}{3}$

14.  $\frac{1}{5}$

15. 8

16.  $\frac{3\sqrt{30}}{5}\pi$

16. 【分析】由题意画出图形,  $BB_1$  上取点  $P$ , 使得  $2BP = PB_1$ ,

连接  $CP, DP, BN$ , 由线面垂直的判定定理和性质, 可得  $BN \perp$  平面  $DCP$ , 所以  $M$  点的轨迹为平面  $DCP$  与球  $O$  的截面圆周, 求出截面圆的半径即可得出答案:

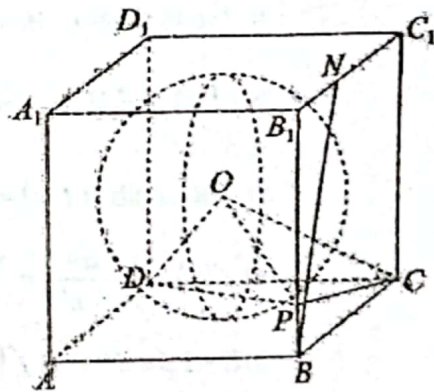
如图所示, 在  $BB_1$  上取点  $P$ , 使得  $2BP = PB_1$ , 连接  $CF, DP, BN$

$\because NC_1 = 2NB_1, \therefore CP \perp BN$ , 又  $DC \perp$  平面  $BCC_1B_1, \therefore DC \perp BN$

又  $\because DC \cap CP = C, DC \subset$  平面  $DCP, CP \subset$  平面  $DCP, BN \not\subset$  平面  $DCP \therefore BN \perp$  平面  $DCP$

又点  $M$  是棱长为  $3\sqrt{2}$  的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的内切球  $O$  的球面上的动点且  $DM \perp BN$ ,

可得  $M$  点的轨迹为平面  $DCP$  与球  $O$  的截面圆周. 连接  $OD, OP, OC$ , 则  $V_{O-DCP} = V_{C-ODP}$



$$\text{又 } CP = \sqrt{BC^2 + BP^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5}, S_{\triangle DPC} = \frac{1}{2} DC \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5} = 3\sqrt{10}$$

又  $O, D, P$  在平面  $DBB_1D_1$ , 则  $C$  到平面  $ODP$  的距离:

$$h = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{AD^2 + DC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3$$

$$\text{又 } S_{\triangle DOP} = S_{\triangle DOP} - S_{\triangle ODP} = \frac{1}{2} BP \cdot BD - \frac{1}{2} BP \cdot \frac{1}{2} BD = 3\sqrt{2}$$

$$\text{设 } O \text{ 到平面 } DPC \text{ 的距离为 } d, \text{ 则 } \frac{1}{3} S_{\triangle DPC} d = \frac{1}{3} S_{\triangle DOP} h, \text{ 解得 } d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{又正方体 } ABCD-A_1B_1C_1D_1 \text{ 的内切球 } O \text{ 得半径 } R = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{则截面圆的半径 } r = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{30}}{10}$$

$$\text{因此可得动 } M \text{ 点的轨迹的长度为 } 2\pi \times \frac{3\sqrt{30}}{10} = \frac{3\sqrt{30}}{5} \pi. \text{ 故答案为: } \frac{3\sqrt{30}}{5} \pi.$$

三、解答题:

17. 解: (1) 由题知:

$$f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - 1 = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$$

$$\because x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right], \therefore -\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}, \therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

$$\therefore \text{当 } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \text{ 即 } 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最大值 } 0$$

$$\text{当 } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}, \text{ 得 } x = -\frac{\pi}{12} \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最小值 } -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

$$(2) \because f\left(\frac{A}{2}\right) = \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -1 \text{ 且 } A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{由余弦定理 } a^2 = c^2 + b^2 - 2 \times c \times b \cos A \text{ 得 } c^2 - 6\sqrt{3}c + 24 = 0, \text{ 解得: } c = 4\sqrt{3} \text{ 或 } 2\sqrt{3}.$$

$$\text{另解: } \because f\left(\frac{A}{2}\right) = \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -1 \text{ 且 } A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 有 } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 则 } B = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } B = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{当 } B = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } c = \frac{\pi}{2}, \text{ 由勾股定理有 } c = 4\sqrt{3}$$

$$\text{当 } B = \frac{2\pi}{3} \text{ 时, } C = A = \frac{\pi}{6}, \text{ 则 } c = a = 2\sqrt{3}. \text{ 综上所述: } c = 4\sqrt{3} \text{ 或 } 2\sqrt{3}.$$

$$18. \text{ 解: (1) 由题知: } x = \frac{2+4+5+6+8}{5} = 5, y = \frac{3+4+5+6+7}{5} = 5$$

$$\therefore \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 14, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 20, \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 10$$

$$\text{所以 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{14}{\sqrt{20} \times \sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{2}}{10} > 0.75$$

所以  $y$  与  $x$  正线性相关, 且相关程度很强.

$$(2) \text{ 因为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{14}{20} = 0.7, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 5 - 0.7 \times 5 = 1.5$$

所以  $y$  关于  $x$  的线性回归方程为  $\hat{y} = 1.5 + 0.7x$ .

当  $x = 12$  时,  $\hat{y} = 1.5 + 0.7 \times 12 = 9.9$

所以预测液体肥料每亩的使用量为 12 千克时西红柿亩产量的增加量为 9.9 百千克.

19. (1) 证明: 由等边三角形  $BCD$  可得  $\angle CDE = 60^\circ$

在  $\triangle ABD$  中,  $AB = 2$ ,  $AD = 4$ ,  $BD = 2\sqrt{3}$ ,  $AB^2 + BD^2 = AD^2$

可得  $AB \perp BD$ ,  $\angle ADB = 30^\circ$ , 所以  $\angle CDA = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

即  $CD \perp AD$ ,

又平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD$

可得  $CD \perp$  平面  $PAD$ .

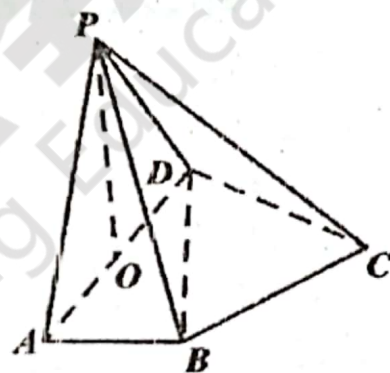
(2) 取  $AD$  的中点  $O$ , 连接  $PO$ , 如图所示:

由等边三角形  $PAD$ , 可得  $PO \perp AD$ ,  $PO = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ .

又平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD$ , 可得  $PO \perp$  平面  $ABCD$

所以四棱锥  $P-ABCD$  的体积为

$$\frac{1}{3} \cdot PO \cdot S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \left( \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 10.$$



$$20. (1) \text{ 若选①: 设 } P(x, y), \text{ 根据题意, 得 } \frac{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + y^2}}{|x - \frac{4\sqrt{3}}{3}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

整理, 得  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . 所以动点  $P$  的轨迹方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

若选②: 设  $P(x, y)$ ,  $S(x', 0)$ ,  $T(0, y')$ , 则  $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 3$ , (I)

因为  $\vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{OS} + \frac{1}{3}\vec{OT}$ , 所以  $\begin{cases} x = \frac{2}{3}x' \\ y = \frac{1}{3}y' \end{cases}$  整理, 得  $\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x \\ y' = 3y \end{cases}$

代入①得  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 所以动点  $P$  的轨迹方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

若选③: 设  $P(x, y)$ , 直线  $l$  与圆相切于点  $H$ , 则  $|PA| + |PB| = d_1 + d_2 = 2|OH| = 4 > 2\sqrt{3} = |AB|$

由椭圆的定义, 知点  $P$  的轨迹是以  $A, B$  为焦点的椭圆

所以  $2a = 4$ ,  $2c = |AB| = 2\sqrt{3}$ , 故  $a = 2$ ,  $c = \sqrt{3}$ ,  $b = 1$

所以动点  $P$  的轨迹方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(2) 设  $Q(0, y_0)$ , 当直线  $l$  的斜率不存在时,  $y_0 = 0$ .

当直线  $l$  的斜率存在时, 设直线  $l$  的斜率为  $k$ ,  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ , 线段  $MN$  的中点为

$G(x_3, y_3)$ . 由  $\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1 \\ \frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = 1 \end{cases}$ , 得  $\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{4} + (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$

所以  $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{4(y_1 + y_2)} = \frac{2x_3}{4 \cdot 2y_3} = \frac{x_3}{4y_3}$

线段  $MN$  的垂直平分线的方程为  $y - y_3 = \frac{4y_3}{x_3}(x - x_3)$

令  $x = 0$ , 得  $y_0 = -3y_3$ . 由  $k = \frac{x_3}{4y_3} = \frac{y_3}{x_3 - 1}$ , 得  $y_3^2 = -\frac{1}{4}x_3^2 + \frac{1}{4}x_3 = -\frac{1}{4}(x_3 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{16}$

由  $y_3^2 > 0$  得  $0 < x_3 < 1$ , 所以  $0 < y_3^2 \leq \frac{1}{16}$ , 则  $-\frac{1}{4} \leq y_3 < 0$  或  $0 < y_3 \leq \frac{1}{4}$ , 所以  $-\frac{3}{4} \leq y_0 < 0$  或  $0 < y_0 \leq \frac{3}{4}$ .

综上所述, 点  $Q$  纵坐标的取值范围是  $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$ .

21. 解: (1) 因为  $f(x) = a \ln x + \left(\frac{1}{x} - 2\right)(a+1)$ , ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ )

则  $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{a+1}{x^2} = \frac{ax - (a+1)}{x^2}$

①若  $-1 \leq a \leq 0$ , 则  $f'(x) < 0$ , 即  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减

②若  $a > 0$ , 则当  $0 < x < \frac{a+1}{a}$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > \frac{a+1}{a}$  时,  $f'(x) > 0$

所以  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{a+1}{a})$  上单调递减, 在区间  $(\frac{a+1}{a}, +\infty)$  上单调递增

③若  $a < -1$ , 则当  $0 < x < \frac{a+1}{a}$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > \frac{a+1}{a}$  时,  $f'(x) < 0$

所以函数  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{a+1}{a})$  上单调递增, 在区间  $(\frac{a+1}{a}, +\infty)$  上单调递减

综上所述，若  $-1 \leq a \leq 0$ ，函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减；

若  $a > 0$ ，函数  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{a+1}{a}\right)$  上单调递减，在区间  $\left(\frac{a+1}{a}, +\infty\right)$  上单调递增；

若  $a < -1$ ，函数  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{a+1}{a}\right)$  上单调递增，在区间  $\left(\frac{a+1}{a}, +\infty\right)$  上单调递减。

(2) 根据题意得  $f(x) \geq a(\ln x - e^x) \Leftrightarrow ae^x + \left(\frac{1}{x} - 2\right)(a+1) \geq 0$

令  $h(x) = ae^x + \left(\frac{1}{x} - 2\right)(a+1)$ 。因为  $h(1) \geq 0$ ，则  $a(e-1) \geq 1$ ，即  $a \geq \frac{1}{e-1} > 0$

于是，由  $ae^x + \left(\frac{1}{x} - 2\right)(a+1) \geq 0$ ，得  $\frac{a}{a+1}e^x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$

即  $\frac{a}{a+1} \geq \frac{2x-1}{xe^x}$  对任意  $x > 0$  恒成立

设函数  $F(x) = \frac{2x-1}{xe^x}$  ( $x > 0$ )，则  $F'(x) = -\frac{(2x+1)(x-1)}{x^2e^x}$

当  $0 < x < 1$  时， $F'(x) > 0$ ；当  $x > 1$  时， $F'(x) < 0$

所以函数  $F(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增，在  $(1, +\infty)$  上单调递减，所以  $[F(x)]_{\max} = F(1) = \frac{1}{e}$

于是，可知  $\frac{a}{a+1} \geq \frac{1}{e}$ ，解得  $a \geq \frac{1}{e-1}$ ，故，实数  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{1}{e-1}, +\infty\right)$ 。

22. (1) 由  $\begin{cases} x = \frac{2t-3}{t-1} \\ y = \frac{2}{t-1} \end{cases}$ ，所以  $t = \frac{2}{y} + 1$ ，代入  $x = \frac{2t-3}{t-1}$ ，整理化简得： $2x + y - 4 = 0$

因为  $t = \frac{2}{y} + 1$  中  $y \neq 0$ ，所以  $x \neq 2$ ，即  $C_1$  的普通方程为： $2x + y - 4 = 0 (x \neq 2)$ 。

由  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$  得： $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ，所以  $C_2$  的普通方程为： $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

把  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$  代入，整理化简得： $\rho^2 = \frac{2}{1 + \sin^2 \theta}$

所以  $C_2$  的极坐标方程为： $\rho^2 = \frac{2}{1 + \sin^2 \theta}$ 。

(2) 设  $C_2$  上任意一点坐标  $P(\sqrt{2} \cos \alpha, \sin \alpha)$ ，设  $P$  到  $C_1$  的距离  $d$ ，则

$$d = \frac{|2\sqrt{2} \cos \alpha + \sin \alpha - 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|3 \sin(\alpha + \varphi) - 4|}{\sqrt{5}}$$

其中  $\tan \varphi = 2\sqrt{2}$  时，有  $\sin(\alpha + \varphi) = 1$ ， $d$  取得最小值  $d_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

23. 解: (1)  $f(x) = \begin{cases} -2x+4, & x \leq -1, \\ -4x+2, & -1 < x < 1, \\ 2x-4, & x \geq 1, \end{cases}$  易知当  $x \in (-\infty, 1)$  时,  $f(x)$  单调递减; 当  $x \in [1, +\infty)$

时,  $f(x)$  单调递增

所以  $f(x) \geq f(1) = -2$ , 即  $f(x)$  有最小值  $-2$ , 无最大值.

(2)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 不等式  $f(x) > m + |2x+2|$  恒成立, 即  $|3x-3| - |x+1| > m + |2x+2|$

整理得,  $3|x-1| - 3|x+1| > m$ .

设  $y = 3|x-1| - 3|x+1|$ , 则  $y = \begin{cases} 6, & x \leq -1 \\ -6x, & -1 < x < 1 \\ -6, & x \geq 1 \end{cases}$

所以函数  $y = 3|x-1| - 3|x+1|$  的最小值是  $-6$

所以  $m < -6$ , 即实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -6)$ .