

2023 年 3 月

绵阳南山中学 2023 年春三月月考数学（理科）试题

命题人：石智文 审题人：青树国

(时间: 120 分钟 分值: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的班级、姓名用 0.5 毫米黑色签字笔填写清楚, 同时用 2B 铅笔将考号准确填涂在答题卡“栏目”内。

2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 考生用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再填涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。

3. 考试结束后, 将答题卡交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若 $2z-5=iz$, 则在复平面内, 复数 z 所对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

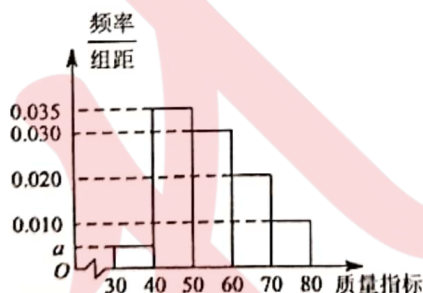
2. 已知集合 $A = \{y | y = 2^x - 1\}$, $B = \{x | y = \log_{0.5}(2-x)\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(-1, 2]$ B. $(-1, 2)$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, 2)$

3. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_3 = a_2 + 10a_1$, $a_5 = 9$, 则 $a_1 = (\quad)$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $-\frac{1}{9}$

4. 某车间从生产的一批产品中随机抽取 1000 个零件进行质量指标的检测, 整理检测结果得此项质量指标的频率分布直方图如图所示, 则下列结论错误的是()

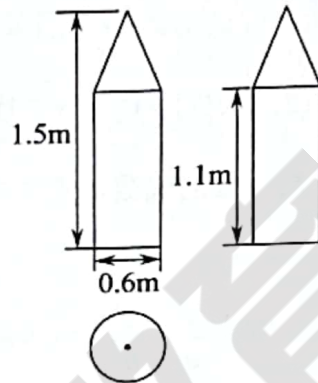


- A. $a = 0.005$
- B. 估计这批产品该项质量指标的众数为 45
- C. 估计这批产品该项质量指标的中位数为 60
- D. 从这批产品中随机选取 1 个零件, 其质量指标在 $[50, 70)$ 的概率约为 0.5

5. 为得到函数 $y = 2\sin 3x$ 的图象，只要把函数 $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$ 图象上所有的点（ ）

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度
B. 向右平移 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{15}$ 个单位长度
D. 向右平移 $\frac{\pi}{15}$ 个单位长度

6. 蒙古包是蒙古族牧民居住的一种房子，建设和搬迁很方便，适用于牧业生产和游牧生活.小明对蒙古包非常感兴趣，于是做了一个蒙古包的模型，其三视图如图所示，现在他需要买一些油毡纸铺上去（底面不铺），则至少要买油毡纸（ ）



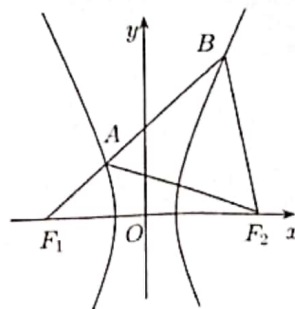
- A. $0.99\pi \text{ m}^2$
B. $0.9\pi \text{ m}^2$
C. $0.66\pi \text{ m}^2$
D. $0.81\pi \text{ m}^2$

7. 2023 年 1 月底，由马斯克、彼得泰尔等人创立的人工智能研究公司 openAI 发布的名为“ChatGTP”的人工智能聊天程序进入中国，迅速以其极高的智能化水平引起国内关注.深度学习是人工智能的一种具有代表性的实现方法，它是以神经网络为出发点的，在神经网络优化中，指数衰减的学习率模型为 $L = L_0 D^{\frac{G}{G_0}}$ ，其中 L 表示每一轮优化时使用的学习率， L_0 表示初始学习率， D 表示衰减系数， G 表示训练迭代轮数， G_0 表示衰减速度.已知某个指数衰减的学习率模型的初始学习率为 0.5，衰减速度为 18，且当训练迭代轮数为 18 时，学习率衰减为 0.4，则学习率衰减到 0.2 以下（不含 0.2）所需的训练迭代轮数至少为（ ）（参考数据： $\lg 2 \approx 0.3010$ ）

- A. 72
B. 74
C. 76
D. 78

8. 如图所示， F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线与 C 的左、右两支分别交于 A, B 两点.若 $|AB|:|BF_2|:|AF_2| = 3:4:5$ ，则双曲线的离心率为（ ）

- A. 2
B. $\sqrt{15}$
C. $\sqrt{13}$
D. $\sqrt{3}$



9. 已知 $(2-x)^{2021} = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_{2021}(x+1)^{2021}$, 则

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{2021}| = ()$$

- A. 2^{4042} B. 1 C. 2^{2021} D. 0

10. 函数 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ 是 ()

- A. 奇函数, 且最大值为 2 B. 偶函数, 且最大值为 2

- C. 奇函数, 且最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. 偶函数, 且最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

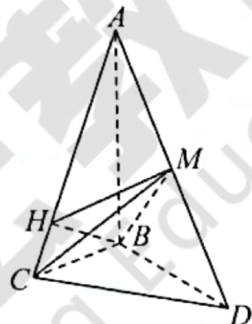
11. 若函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 满足 $f(1-x) + f(1+x) = 0$ 对一切实数 x 恒成立, 则不等式 $f'(2x+3) < f'(x-1)$ 的解集为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, -4)$ C. $(-4, 0)$ D. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

12. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB \perp$ 平面 BCD , $BC \perp CD$, $AB = BD = 2$, M 为 AD 中点, H 为线段 AC 上一点 (除 AC 的中点外), 且 $MH \perp HB$.

当三棱锥 $M-HAB$ 的体积最大时, 则三棱锥 $M-ABC$ 的外接球表面积为 ()

- A. 4π B. 6π
C. 8π D. 12π



二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (1, t)$, 且 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, 则 $t =$ _____.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{10} = 20$, $S_{30} = 90$, 则 $S_{20} =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = e^x + m \ln x (m \in \mathbf{R})$, 若对任意正数 x_1, x_2 , 当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $f(x_1) - f(x_2) > x_1 - x_2$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 _____.

16. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$, 其焦点为点 F , 点 P 是抛物线 C 上的动点, 过点 F 作直线 $(m+1)x + y - 4m - 6 = 0$ 的垂线, 垂足为 Q , 则 $|PQ| + |PF|$ 的最小值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

第24届冬季奥运会于2022年2月在北京和张家口举办,为了普及冬奥知识,管方微信公众号: jh985211 客服微信: 18117901643 京西某校组织全体学生进行了冬奥知识答题比赛,从全校众多学生中随机选取了20名学生作为样本,得到他们的分数统计如下:

分数段	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100]
人数	1	2	2	8	3	3	1

我们规定 60 分以下为不及格; 60 分及以上至 70 分以下为及格; 70 分及以上至 80 分以下为良好; 80 分及以上为优秀.

- (1) 从这 20 名学生中随机抽取 2 名学生, 恰好 2 名学生都是优秀的概率是多少?
- (2) 将上述样本统计中的频率视为概率, 从全校学生中随机抽取 2 人, 以 X 表示这 2 人中优秀人数, 求 X 的分布列与期望.

18. (12 分)

在① $a \cos B - b \cos A = c - b$, ② $\tan A + \tan B + \tan C - \sqrt{3} \tan B \tan C = 0$, ③ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}a(b \sin B + c \sin C - a \sin A)$, 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并加以解答.

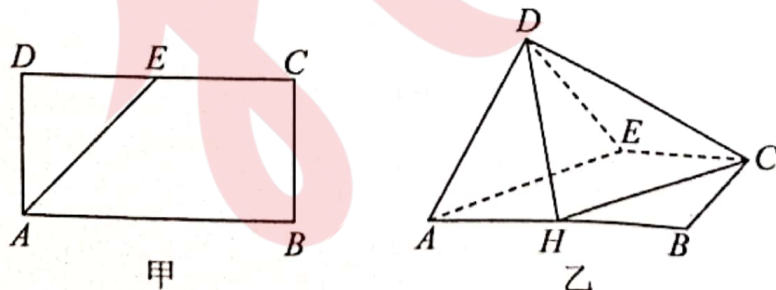
在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且_____.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $a = 8$, $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12 分)

如图甲, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2AD = 2\sqrt{2}$, E 为线段 DC 的中点, $\triangle ADE$ 沿直线 AE 折起, 使得 $DC = \sqrt{6}$, 如图乙.



(1) 求证: $BE \perp$ 平面 ADE ;

(2) 线段 AB 上是否存在一点 H ，使得平面 ADE 与平面 DHC 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$ ？若不存在，说明理由；若存在，求出 H 点的位置。

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = mx \ln x - 1$ ， $m \neq 0$ 。

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $g(x) = x^2 - \frac{2}{e}x$ ，且关于 x 的不等式 $f(x) \leq g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，其中 e 是自然对数的底数，求实数 m 的取值范围。

21. (12 分)

椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，右顶点为 A ，设点 O 为坐标原点，点 B 为椭圆 E 上异于左、右顶点的动点， $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$ 。

(1) 求椭圆 E 的标准方程；

(2) 设直线 $l: x = t$ 交 x 轴于点 P ，其中 $t > a$ ，直线 PB 交椭圆 E 于另一点 C ，直线 BA 和 CA 分别交直线 l 于点 M 和 N ，若 O, A, M, N 四点共圆，求 t 的值。

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 + 5 \cos t \\ y = 5 + 5 \sin t \end{cases}$ (t 为参数)，以坐标原点为极点， x

轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2 \sin \theta$ 。

(1) 把 C_1 的参数方程化为极坐标方程；

(2) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 ($\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$)

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

已知正实数满足 $4a + b = ab$ 。

(1) 求 $a + b$ 的最小值；

(2) 当 $a + b$ 取得最小值时， a, b 的值满足不等式 $|x - a| + |x - b| \geq t^2 - 2t$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，求实数 t 的取值范围。