

绵阳南山中学 2023 年春 3 月月考数学 (理科)

试题答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分.

1—5 ABCCD 6—10 DBCAC 11—12 CB

11 题解析

【详解】由 $f(1-x)+f(1+x)=0$, 对上式求导可得 $-f'(1-x)+f'(1+x)=0$,即 $f'(1+x)=f'(1-x)$, 所以 $f'(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 因为 $f'(x)=3x^2+2bx+c$,所以 $f'(x)$ 图像的开口向上, 对称轴为 $x=1$, 由 $f'(2x+3)<f'(x-1)$,得 $|2x+3-1|<|x-1-1|$, 解得 $-4<x<0$. 故选: C.

12 题解析

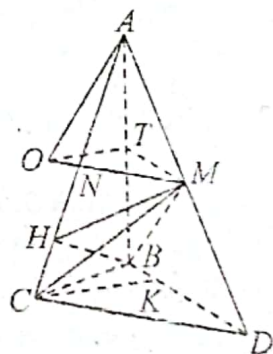
【详解】在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 因为 M 为 AD 中点, 故 $BM \perp AD$, 且 $BM = \sqrt{2}$, 因为 $CD \perp BC$, $CD \perp AB$, 所以 $CD \perp$ 平面 ABC , 故 $CD \perp BH$, 又因为 $MH \perp BH$, 所以 $BH \perp$ 平面 ACD , 因此 $BH \perp AD$, 故 $AM \perp$ 平面 BHM , 三棱锥 $M-HAB$ 的体积等于三棱锥 $A-BHM$ 的体积, 即只需底面 $\triangle BHM$ 面积最大即可. 因为 $BH^2 + HM^2 = BM^2 = 2$, 则 $2 \geq 2BH \cdot HM$, 故 $S_{\triangle BHM} = \frac{1}{2}BH \cdot HM \leq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $BH = HM = 1$ 时取等号. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 30^\circ$,

故 $BC = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 过点 C 作 $CK \perp BD$, 取 AB , AC 的中点 T , N ,连接 MN , MT , 过点 T 作 CK 的平行线交 MN 于点 O .由 $CK \perp$ 平面 ABD 知 $OT \perp$ 平面 ABD . 又 $DC \perp$ 平面 ABC ,故 $MN \perp$ 平面 ABC . 因此 O 为三棱锥 $M-ABC$ 的外接球的球心, 由 $\tan \angle TOM = \tan \angle KCD = \tan \angle CBK = \frac{CD}{BC} = \sqrt{2}$,因为 $TM = 1$, 所以 $OT = \frac{TM}{\tan \angle TOM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $R^2 = OA^2 = \frac{3}{2}$, 即三棱锥 $M-ABC$ 的外接球表面积为 6π . 故选: B

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 2 14. 50 15. $[0, +\infty)$ 16. $5 - \sqrt{2}$

16 题解析:

【详解】将已知直线 $(m+1)x - 4m + y - 6 = 0$ 化为 $m(x-4) + x + y - 6 = 0$, 当 $x=4$ 时 $y=2$,可确定直线过定点 $(4, 2)$, 记为 M 点.∵ 过点 F 做直线 $(m+1)x - 4m + y - 6 = 0$ 的垂线, 垂足为 Q ,

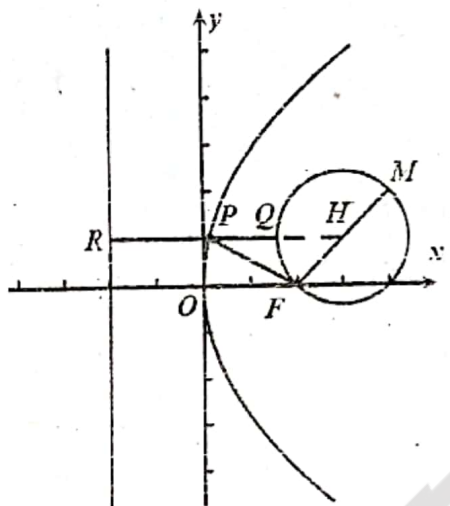
$\therefore FQ \perp$ 直线 $(m+1)x - 4m + y - 6 = 0$, 即 $FQ \perp MQ, \angle FQM = 90^\circ$,

故 Q 点的轨迹是以 FM 为直径的圆, 半径 $r = \sqrt{2}$, 其圆心为 FM 的中点, 记为点 H , $\therefore H(3, 1)$,

$\therefore P$ 在抛物线 $C: y^2 = 8x$ 上, 其准线为 $x = -2$,

$\therefore |PF|$ 等于 P 到准线的距离.

过 P 作准线的垂线, 垂足为 R . 要使 $|PF| + |PQ|$ 取到最小, 即 $|PR| + |PQ|$ 最小, 此时 R, P, Q 三点共线, 且三点连线后直线 RQ 过圆心 H . 如图所示,



此时 $(|PR| + |PQ|)_{\min} = HR - r = 5 - \sqrt{2}$.

故答案为: $5 - \sqrt{2}$

三、解答题: 共 70 分.

(一) 必考题: 60 分

17. (12 分)

解: (1) 记恰好 2 名学生都是优秀的事件为 A ,

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{6}{190} = \frac{3}{95}.$$

(2) 抽到一名优秀学生的概率为 $p = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$,

X 的取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0) = C_2^0 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{16}{25},$$

$$P(X=1) = C_2^1 \left(\frac{4}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{8}{25},$$

$$P(X=2) = C_2^2 \left(\frac{4}{5}\right)^0 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25},$$

故 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$

$$E(X) = 0 \times \frac{16}{25} + 1 \times \frac{8}{25} + 2 \times \frac{1}{25} = \frac{2}{5}.$$

18. (12分)

解：(1) 若选①，由 $a \cos B - b \cos A = c - b$ 及正弦定理，得

$$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin C - \sin B,$$

$$\text{即 } \sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin B,$$

$$\text{即 } \sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B - \sin B,$$

$$\text{所以 } 2 \cos A \sin B = \sin B,$$

因为 $0 < B < \pi$, 所以 $\sin B \neq 0$,

$$\text{所以 } \cos A = \frac{1}{2}, \text{ 又 } 0 < A < \pi,$$

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{3}.$$

若选②，由 $\tan A + \tan B + \tan C - \sqrt{3} \tan B \tan C = 0$ ，得

$$\tan C = \frac{\tan A + \tan B}{\sqrt{3} \tan B - 1} = -\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B},$$

$$\therefore \sqrt{3} \tan B = \tan A \cdot \tan B,$$

因为 $0 < B < \pi$, 所以 $\tan B \neq 0$ ，当 $B = \frac{\pi}{2}$ 时， $\tan B$ 不存在，

所以 $\tan A = \sqrt{3}$ ，又 $0 < A < \pi$ ，

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{3}.$$

若选③，因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}a(b \sin B + c \sin C - a \sin A)$ ，

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a(b \sin B + c \sin C - a \sin A) = \frac{1}{2}bc \sin A,$$

$$\text{即 } b^2 + c^2 - a^2 = bc,$$

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}, \text{ 又 } 0 < A < \pi,$$

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由 (1) 知， $A = \frac{\pi}{3}$ ，

$\because \triangle ABC$ 内切圆半径为 $\sqrt{3}$,

$$\therefore \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A, \text{ 即 } (b+c+8) \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}bc$$

$$b+c+8 = \frac{1}{2}bc \text{ ①},$$

由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3}$, 即 $b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{1}{2} = 64$,

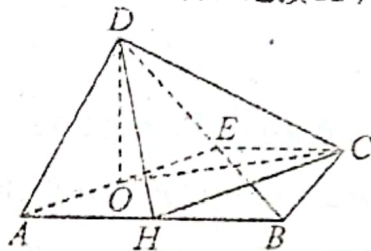
$$\text{所以 } (b+c)^2 - 3bc = 64 \text{ ②},$$

$$\text{联立 ①②, 得 } \left(\frac{1}{2}bc - 8\right)^2 - 3bc = 64, \text{ 解得 } bc = 44,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 44 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 11\sqrt{3}.$$

19. (12 分)

解: (1) 证明: 连接 BE , 取线段 AE 的中点 O , 连接 DO, OC ,



在 $Rt\triangle ADE$ 中, $DA = DE = \sqrt{2}$,

$$\therefore DO \perp AE, DO = 1,$$

在 $\triangle OEC$ 中, $OE = \frac{1}{2}AE = 1, EC = \sqrt{2}, \angle OEC = \frac{3}{4}\pi$,

由余弦定理可得: $OC^2 = 1 + 2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$,

$$\therefore OC = \sqrt{5}$$

在 $\triangle DOC$ 中, $DC^2 = 6 = DO^2 + OC^2$,

$$\therefore DO \perp OC,$$

又 $AE \cap OC = O, AE, OC \subset \text{平面 } ABCE$,

$\therefore DO \perp \text{平面 } ABCE$,

又 $DO \subset \text{平面 } ADE$,

$\therefore \text{平面 } ADE \perp \text{平面 } ABCE$,

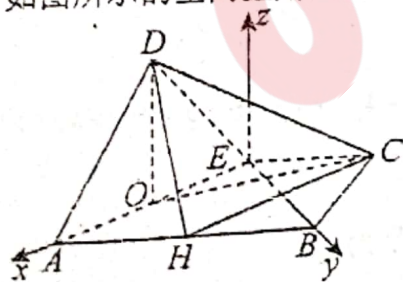
在 $\triangle ABE$ 中, $AE = BE = 2, AB = 2\sqrt{2}$,

$$\therefore BE \perp AE$$

$\because \text{平面 } ADE \cap \text{平面 } ABCE = AE, BE \subset \text{平面 } ABCE$,

$\therefore BE \perp \text{平面 } ADE$.

(2) 过 E 作 DO 的平行线 l , 以 E 为原点, EA, EB, l 分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



$$D(1,0,1), C(-1,1,0), A(2,0,0), B(0,2,0),$$

平面 ADE 的法向量 $\vec{n}_1 = (0,1,0)$,

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 AB 的方程为 $x+y=2$,

设 H 的坐标为 $(t, 2-t, 0)$,

$$\text{则 } \vec{HC} = (-t-1, t-1, 0), \vec{DC} = (-2, 1, -1),$$

设平面 DHC 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$,

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{HC} = 0, \vec{n}_2 \cdot \vec{DC} = 0,$$

$$\text{所以 } (-t-1)x + (t-1)y = 0, -2x + y - z = 0,$$

$$\text{令 } y = 1+t, \text{ 则 } x = t-1, z = 3-t, \therefore \vec{n}_2 = (t-1, 1+t, 3-t),$$

$$\text{由已知 } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1+t}{1 \cdot \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (3-t)^2}},$$

解之得: $t=1$ 或 9 (舍去),

所以点 H 是线段 AB 的中点.

20. (12分)

解: (1) 根据题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = m(\ln x + 1), \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{1}{e}.$$

当 $m > 0$ 时, $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, $x > \frac{1}{e}$ 时 $f'(x) > 0$;

当 $m < 0$ 时, $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$, $x > \frac{1}{e}$ 时 $f'(x) < 0$.

综上所述, 当 $m > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增;

当 $m < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 依题意, $mx \ln x - 1 \leq x^2 - \frac{2}{e}x$, 即 $x + \frac{1}{x} - m \ln x - \frac{2}{e} \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$$\text{令 } p(x) = x + \frac{1}{x} - m \ln x - \frac{2}{e}, \text{ 则 } p'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{m}{x} = \frac{x^2 - mx - 1}{x^2}.$$

对于 $y = x^2 - mx - 1$, $\Delta = m^2 + 4 > 0$, 故其必有两个零点, 且两个零点的积为 -1 ,

则两个零点一正一负, 设其正零点为 $x_0 \in (0, +\infty)$,

$$\text{则 } x_0^2 - mx_0 - 1 = 0, \text{ 即 } m = x_0 - \frac{1}{x_0},$$

且 $p(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{故 } p(x_0) \geq 0, \text{ 即 } x_0 + \frac{1}{x_0} - \left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right) \ln x_0 - \frac{2}{e} \geq 0.$$

$$\text{令 } q(x) = x + \frac{1}{x} - \left(x - \frac{1}{x}\right) \ln x - \frac{2}{e},$$

$$\text{则 } q'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \ln x - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \ln x,$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $q'(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $q'(x) < 0$,

则 $q(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{又 } q\left(\frac{1}{e}\right) = q(e) = 0, \text{ 故 } x_0 \in \left[\frac{1}{e}, e\right],$$

显然函数 $m = x_0 - \frac{1}{x_0}$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上是关于 x_0 的单调递增函数,

$$\text{则 } m \in \left[\frac{1}{e} - e, e - \frac{1}{e}\right],$$

所以实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e} - e, 0\right) \cup \left(0, e - \frac{1}{e}\right]$.

21. (12 分)

解: (1) 由题意, 设椭圆半焦距为 c , 则 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$, 得 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

设 $B(x_1, y_1)$, $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}a|y_1|$, 由 $|y_1| \leq b$, 所以 $S_{\triangle OAB}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}ab$,

将 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 代入 $\frac{1}{2}ab = \sqrt{3}$, 有 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}$, 解得 $a = 2, b = \sqrt{3}$,

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;

(2) 设 $C(x_2, y_2)$, 因为点 B 为椭圆 E 上异于左、右顶点的动点, 则直线 BC 不与 x 轴重合,

设直线 BC 方程为 $x = my + t$, 与椭圆方程联立得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6mty + 3t^2 - 12 = 0$,

$\Delta = 36m^2t^2 - 12(3m^2 + 4)(t^2 - 4) > 0$, 可得 $t^2 < 3m^2 + 4$,

由韦达定理可得 $y_1 + y_2 = -\frac{6mt}{3m^2 + 4}$, $y_1y_2 = \frac{3t^2 - 12}{3m^2 + 4}$,

直线 BA 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$, 令 $x = t$ 得点 M 纵坐标 $y_M = \frac{y_1(t - 2)}{x_1 - 2}$,

同理可得点 N 纵坐标 $y_N = \frac{y_2(t - 2)}{x_2 - 2}$,

当 O, A, M, N 四点共圆, 由相交弦定理可得 $|PA||PO| = |PM| \cdot |PN|$, 即 $t(t - 2) = |y_M y_N|$,

$$\begin{aligned} y_M y_N &= \frac{y_1 y_2 (t - 2)^2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = \frac{y_1 y_2 (t - 2)^2}{(my_1 + t - 2)(my_2 + t - 2)} = \frac{y_1 y_2 (t - 2)^2}{m^2 y_1 y_2 + m(t - 2)(y_1 + y_2) + (t - 2)^2} \\ &= \frac{3(t^2 - 4)(t - 2)^2}{3m^2(t^2 - 4) - 6m^2 t(t - 2) + (3m^2 + 4)(t - 2)^2} = \frac{3(t + 2)(t - 2)^2}{3m^2(t + 2) - 6m^2 t + (3m^2 + 4)(t - 2)} \\ &= \frac{3(t + 2)(t - 2)^2}{4(t - 2)} = \frac{3}{4}(t + 2)(t - 2), \end{aligned}$$

由 $t > 2$, 故 $t(t - 2) = \frac{3}{4}(t + 2)(t - 2)$, 解得 $t = 6$.

(二) 选考题:共 10 分.

22. (10 分) (1) $\because C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 + 5\cos t \\ y = 5 + 5\sin t \end{cases}$

$$\therefore (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25(\cos^2 t + \sin^2 t) = 25,$$

即 C_1 的直角坐标方程为 $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$,

把 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 代入 $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$,

$$\text{化简得: } \rho^2 - 8\rho \cos \theta - 10\rho \sin \theta + 16 = 0.$$

(2) C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 2y$, C_1 的直角坐标方程为 $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$,

$\therefore C_1$ 与 C_2 交点的直角坐标为 $(1, 1), (0, 2)$.

$\therefore C_1$ 与 C_2 交点的极坐标为 $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}), (2, \frac{\pi}{2})$.

23. (10 分)

(1) 由题意

$$\because 4a + b = ab,$$

$$\therefore \frac{4}{b} + \frac{1}{a} = 1,$$

$$\therefore a + b = (a + b) \left(\frac{4}{b} + \frac{1}{a} \right) = 5 + \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} \geq 5 + 4 = 9,$$

当且仅当 $\frac{4a}{b} = \frac{b}{a}$, 即 $b = 2a$ 时, $a + b$ 有最小值 9,

由 $4a + b = ab$, 可求得此时 $a = 3, b = 6$.

(2) 由题意及 (1) 得

$$|x-a| + |x-b| = |x-a| + |b-x| \geq |b-a| = 3.$$

$\therefore$ 满足不等式 $|x-a| + |x-b| \geq t^2 - 2t$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立,

所以 $3 \geq t^2 - 2t$,

解得 $-1 \leq t \leq 3$

$\therefore$ 实数 t 的取值范围为 $[-1, 3]$.