

成都市 2020 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题, 共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分, 共 60 分)

1. C; 2. C; 3. B; 4. C 5. A; 6. B; 7. D 8. A; 9. B; 10. D; 11. A; 12. D.

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分, 共 20 分)

13. $\sqrt{2}$; 14. $-\frac{3}{5}$; 15. $\sqrt{31}$; 16. $(0, \frac{3}{e^2})$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由题意,列联表如下:

报名班型	课 程		合 计
	“劳育课程”	“美育课程”	
文科班	35	35	70
理科班	10	20	30
合 计	45	55	100

……6 分

$$(II) \because K^2 = \frac{100 \times (35 \times 20 - 35 \times 10)^2}{45 \times 55 \times 70 \times 30} = \frac{700}{297} \approx 2.357 < 6.635, \quad \text{……10 分}$$

 $\therefore$ 没有 99% 的把握认为“劳育课程”“美育课程”的选择与文理科有关. ……12 分
18. 解:(I)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . $\because a_1, a_2 + 3, a_3 - 6$ 成等差数列,

$$\therefore 2(a_2 + 3) = a_1 + a_3 - 6. \quad \text{……2 分}$$

$$\therefore 2a_1q + 6 = a_1 + a_1q^2 - 6. \quad \text{……3 分}$$

$$\therefore q = 3,$$

$$\therefore \text{解得 } a_1 = 3. \quad \text{……5 分}$$

$$\therefore a_n = 3^n. \quad \text{……6 分}$$

(II) 设 $b_n = na_n$, 则 $b_n = n \cdot 3^n$.

$$\therefore T_n = 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + n \times 3^n \quad \text{①}$$

$$\therefore 3T_n = 3^2 + 2 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + \cdots + n \times 3^{n+1} \quad \text{②}$$

$$\text{由①-②得, } -2T_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n - n \cdot 3^{n+1} \quad \text{……8 分}$$

$$\therefore -2T_n = \frac{3 \times (1 - 3^n)}{1 - 3} - n \cdot 3^{n+1} \quad \text{……10 分}$$

$$\therefore T_n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解：(I) 取 B_1C_1 的中点 O ，连接 AO, A_1O 。

$\because \triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle AB_1C_1$ 均是边长为 2 的正三角形，

$$\therefore AO \perp B_1C_1, A_1O \perp B_1C_1, A_1O = AO = \sqrt{3}. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$\therefore \angle AOA_1$ 为二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 的平面角。 $\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\because AA_1 = \sqrt{6},$$

$$\therefore A_1O^2 + AO^2 = A_1A^2.$$

$$\therefore A_1O \perp AO. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$\therefore$ 平面 $AB_1C_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$. $\dots\dots 6 \text{ 分}$

(II) 由 (I) 知， $A_1O \perp AO, AO \perp B_1C_1, A_1O \perp B_1C_1$ 。

以 O 为坐标原点， $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OA}$ 的方向分别为 x 轴， y 轴， z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$ 。则 $A_1(\sqrt{3}, 0, 0)$ ，

$$C_1(0, -1, 0), A(0, 0, \sqrt{3}), B(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}).$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = (-\sqrt{3}, -1, 0), \overrightarrow{AC_1} = (0, -1, -\sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{BA_1} = (2\sqrt{3}, -1, -\sqrt{3}). \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 A_1C_1B 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \sqrt{3}x_1 + y_1 = 0, \\ 2\sqrt{3}x_1 - y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{令 } x_1 = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (1, -\sqrt{3}, 3). \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

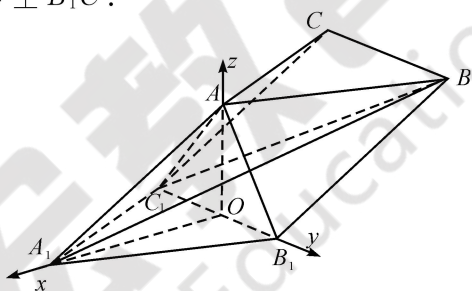
设平面 A_1C_1CA 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \sqrt{3}x_2 + y_2 = 0, \\ y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{令 } x_2 = 1, \text{ 得 } \mathbf{m} = (1, -\sqrt{3}, 1). \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{7}{\sqrt{13} \times \sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{65}}{65}. \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{所求锐二面角的余弦值为 } \frac{7\sqrt{65}}{65}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$



20. 解：(I) 由题意，双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的焦点为 $F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0)$ ，

$\because$ 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 与椭圆 C 有相同焦点且在第一象限交点为 P ，

$$\text{又 } |PF_2| = 1, \therefore |PF_1| = 5, |PF_1| + |PF_2| = 6. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore 2a = 6, a = 3. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore b^2 = 4.$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

(II) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $D(mx_2, my_2)$.

$\therefore$ 四边形 $OAED$ 为平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AE}, E(x_1 + mx_2, y_1 + my_2).$$

$\therefore$ 点 A, B, E 均在椭圆 C 上,

$$\therefore \frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1, \frac{x_2^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} = 1, \frac{(x_1 + mx_2)^2}{9} + \frac{(y_1 + my_2)^2}{4} = 1.$$

$$\therefore m > 0,$$

$$\therefore 4x_1x_2 + 9y_1y_2 + 18m = 0. \quad \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore (4 + 9k^2)x_1x_2 + 9k(x_1 + x_2) + 9 + 18m = 0. \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + 1, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } (9k^2 + 4)x^2 + 18kx - 27 = 0.$$

$$\text{显然 } \Delta = 432(3k^2 + 1) > 0.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-18k}{9k^2 + 4}, x_1x_2 = \frac{-27}{9k^2 + 4}. \quad \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{-27}{9k^2 + 4} \times (4 + 9k^2) - \frac{18k}{9k^2 + 4} \times 9k + 18m + 9 = 0.$$

$$\therefore m = 2 - \frac{4}{9k^2 + 4}. \quad \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore m \in [1, 2). \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{ 解: (I) } \therefore f'(x) = \frac{x^{a-1}e^{2x}(2x-a)}{x^{2a}}. \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore x > 0, a \in \mathbf{R}$$

$$\therefore \text{当 } a \leq 0 \text{ 时, } f'(x) \geq 0 \text{ 恒成立, 函数 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增.} \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

当 $a > 0$ 时,

$$\text{当 } 0 < x < \frac{a}{2} \text{ 时, } f'(x) < 0; \text{ 当 } x > \frac{a}{2} \text{ 时, } f'(x) > 0.$$

$$\text{函数 } f(x) \text{ 在 } (0, \frac{a}{2}) \text{ 上单调递减, 在 } (\frac{a}{2}, +\infty) \text{ 上单调递增.} \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间;

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, 函数 } f(x) \text{ 的单调递减区间为 } (0, \frac{a}{2}), \text{ 单调递增区间为 } (\frac{a}{2}, +\infty).$$

$\cdots \cdots 5 \text{ 分}$

$$(II) \text{ 函数 } g(x) = a \ln x + \frac{f(x)}{e^2} - 2x + 1 \text{ 恰有两个零点,}$$

$$\text{等价于方程 } \frac{e^{2x}}{e^2 x^a} = 2x - 1 - a \ln x \text{ 有两个不等的实数解.}$$

$$\because x > 0, a > 0, \frac{e^{2x}}{e^2 x^a} = 2x - 1 - a \ln x = \ln e^{2x} - \ln e - \ln x^a = \ln \frac{e^{2x-1}}{x^a},$$

$$\text{令 } t = \frac{e^{2x-1}}{x^a} > 0, \text{ 则 } \frac{t}{e} = \ln t.$$

$$\text{令 } h(t) = \ln t - \frac{t}{e}, \text{ 则 } h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{e}.$$

$\therefore$ 当 $0 < t < e$ 时, $h'(t) > 0$; 当 $t > e$ 时, $h'(t) < 0$.

$\therefore$ 函数 $h(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

$$\because h(e) = 0,$$

$\therefore$ 方程 $\frac{t}{e} = \ln t$ 有唯一解 $t = e$.

$\therefore$ 方程 $\frac{e^{2x}}{e^2 x^a} = 2x - 1 - a \ln x$ 有两个不等的实数解等价于方程 $e = \frac{e^{2x-1}}{x^a}$ 有两个不相等的实数解.7 分

等价于方程 $a \ln x = 2x - 2$ 有两个不相等的实数解.

$$\text{构造函数 } k(x) = a \ln x - 2x + 2, \text{ 则 } k'(x) = \frac{a}{x} - 2.$$

$$\because a > 0,$$

$\therefore$ 当 $0 < x < \frac{a}{2}$ 时, $k'(x) > 0$; 当 $x > \frac{a}{2}$ 时, $k'(x) < 0$.

$\therefore$ 函数 $k(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递减.

$$\because x \rightarrow 0^+, k(x) \rightarrow -\infty; x \rightarrow +\infty, k(x) \rightarrow -\infty.$$

$\therefore$ 只需要 $k(\frac{a}{2}) = a \ln \frac{a}{2} - a + 2 > 0$, 即 $\ln \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - 1 > 0$9 分

$$\text{构造函数 } m(a) = \ln \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - 1, \text{ 则 } m'(a) = \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2}.$$

$\therefore$ 当 $0 < a < 2$ 时, $m'(a) < 0$; 当 $a > 2$ 时, $m'(a) > 0$.

$\therefore$ 函数 $m(a)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增.

$$\because m(2) = 0,$$

$\therefore$ 当 $a \neq 2$ 时, $\ln \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - 1 > 0$ 恒成立.11 分

$\therefore a$ 的取值范围为 $(0, 2) \cup (2, +\infty)$12 分

22. 解: (I) $\because$ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t \end{cases}$ (t 为参数),

$\therefore$ 曲线 C 的普通方程为 $y^2 = 3x$2 分

$\because$ 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 3$,

$\therefore \sqrt{3}\rho \sin\theta + \rho \cos\theta = 3$3 分

$$\because x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta,$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的直角坐标方程为 } x + \sqrt{3}y - 3 = 0. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 由(I)知, 点 P 在直线 l 上,

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = -3 - \frac{\sqrt{3}}{2}m \\ y = 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}m \end{cases} \quad (m \text{ 为参数}), \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{代入 } y^2 = 3x \text{ 得, } m^2 + 14\sqrt{3}m + 84 = 0.$$

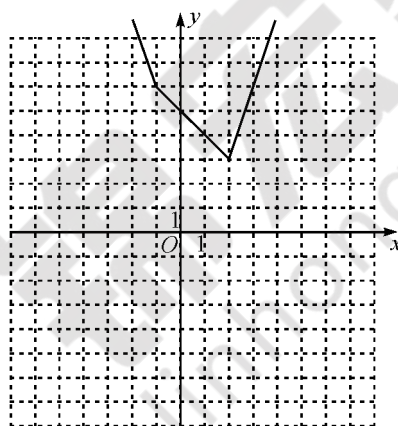
设 m_1, m_2 是上述方程的两根,

$$\therefore \Delta > 0, m_1 + m_2 = -14\sqrt{3}, m_1 m_2 = 84 > 0. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore |PA| + |PB| = |m_1| + |m_2| = |m_1 + m_2| = 14\sqrt{3}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$23. \text{ 解: (I) 由题得, } f(x) = |x+1| + 2|x-2| = \begin{cases} -3x+3, & x \leq -1 \\ -x+5, & -1 < x < 2 \\ 3x-3, & x \geq 2. \end{cases} \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

函数 $y = f(x)$ 的图象为



$\dots\dots 5 \text{ 分}$

(II) 函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位长度后得到函数 $y = f(x+2)$ 的图象, $y = f(x)$ 的图象与 $y = f(x+2)$ 的图象如右图所示.

$\dots\dots 7 \text{ 分}$

当 $x \in (0, 2)$ 时, 由 $f(x+2) = f(x)$ 解得, $x = \frac{1}{2}$.

$\dots\dots 9 \text{ 分}$

由图象可知不等式 $f(x+2) > f(x)$ 的解集为

$(\frac{1}{2}, +\infty)$. $\dots\dots 10 \text{ 分}$

