

2023 届高三第三次联考

文科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	C	B	B	A	A	A	D	C	B	B	B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\sqrt{2}$ 14. 1 15. $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ 16. 6

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分)

解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由 $S_4 = 4S_2$ 得， $4a_1 + 6d = 4(2a_1 + d)$ ，解得 $d = 2a_1$ ，……………1 分
 而 $a_1 + (3n-1)d = 3[a_1 + (n-1)d] + 2$ ，即 $2d = 2a_1 + 2$ ，……………3 分
 于是 $d = 2$ ， $a_1 = 1$ ，……………5 分
 $\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$ ；……………6 分
 （2）由 $\log_2 b_n = a_n$ 得 $b_n = 2^{a_n} = 2^{2n-1}$ ，……………8 分
 $\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，4 为公比的等比数列，……………9 分
 $\therefore T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(1-4^n)}{1-4} = \frac{2(4^n-1)}{3}$ 。……………12 分

18. (12 分)

解：（1） $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ ， $\bar{y} = \frac{9.5+8.6+7.8+7+6.1}{5} = 7.8$ ，……………2 分
 $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10$ ， $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 7.06$ ， $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -8.4$ ，……………4 分
 $\therefore r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-8.4}{\sqrt{10 \times 7.06}} \approx -1$ 。……………6 分

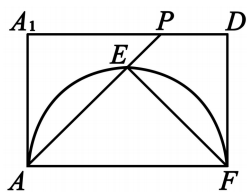
相关系数近似为 -1，说明 y 与 x 的相关程度相当高，从而可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系；……………7 分

（2）由（1）中数据， $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{-8.4}{10} = -0.84$ ，……………9 分

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 7.8 - (-0.84 \times 3) = 10.32$ ，……………11 分

$\therefore y$ 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = -0.84x + 10.32$ 。……………12 分

19. (12 分)

解：(1) 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， A_1D 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中线， $\therefore A_1D \perp B_1C_1$ ，.....2 分又 $AA_1 \perp$ 面 $A_1B_1C_1$ ， $\therefore AA_1 \perp B_1C_1$ ，而 $AA_1 \cap A_1D = A_1$ ， $\therefore B_1C_1 \perp$ 面 AA_1D ，又 $P \in A_1D$ ，即 $AP \subset$ 面 AA_1D ， $\therefore B_1C_1 \perp AP$ ，而 $BC \parallel B_1C_1$ ， $\therefore BC \perp AP$ ；.....5 分(2) 设线段 BC 的中点为 F ，由 $V_{ABC-A_1B_1C_1} = 6\sqrt{3}$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ 得 $AA_1 = 2$ ， $AF = 3$ ，.....7 分若三棱锥 $A-BCE$ 的体积最大，则点 E 到面 ABC 的距离最大，.....8 分 $\therefore AP \perp$ 面 BCE ， $\therefore AP \perp EF$ ， $\therefore$ 点 E 在以 AF 为直径的圆上，.....9 分作出截面 $AFDA_1$ ，如图，易知点 E 到面 ABC 的最大距离为 $\frac{3}{2}$ ，此时， $\angle A_1AE = \angle FAE = 45^\circ$ ， $\therefore A_1P = AA_1 = 2$ ， $PD = 1$ 。.....12 分

20. (12 分)

解：(1) 当 $m=1$ 时， $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 1$ ， $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 12x - 12 = 12(x^3 - x^2 + x - 1) = 12(x-1)(x^2+1)$ ，.....2 分当 $x \in [0,1)$ 时， $f'(x) < 0$ ；当 $x \in (1,+\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $[0,1)$ ，单调递增区间为 $(1,+\infty)$ ；.....4 分(2) $f'(x) = 12x^3 - 12mx^2 + 12mx - 12m^2 = 12(x-m)(x^2+m)$ ，当 $x \in [0,m)$ ， $f'(x) < 0$ ；当 $x \in (m,+\infty)$ ， $f'(x) > 0$ ， $\therefore f(x)$ 在 $[0,m)$ 单调递减；在 $(m,+\infty)$ 单调递增，.....7 分① 当 $m \geq 1$ 时， $\therefore f(x)$ 在 $(0,m)$ 单调递减，且 $0 < \sqrt{m} \leq m$ ， $\therefore f(x) \leq f(0) = 1$ ，符合题意；.....9 分② 当 $0 < m < 1$ 时，则 $\sqrt{m} > m$ ， $\therefore f(x)$ 在 $[0,m)$ 单调递减；在 $(m,\sqrt{m}]$ 单调递增，于是 $f(\sqrt{m}) = 9m^2 - 16m^2\sqrt{m} + 1 \leq 1$ ， $\therefore \frac{81}{256} \leq m < 1$ ，.....11 分 $\therefore$ 实数 m 的取值范围为 $[\frac{81}{256}, +\infty)$ 。.....12 分

21. (12 分)

解：(1) 由题意， $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $a^2 = b^2 + c^2$ ，解得 $a^2 = 4b^2$ ，.....2 分代入点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 得 $\frac{1}{4b^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$ ，解得 $b^2 = 1$ ， $a^2 = 4$ ， $\therefore$ 椭圆 E 的方程为： $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ；.....4 分

(2) 由题意, $M(1,0)$, 当 l_1, l_2 斜率都不为 0 时, 设 $l_1: x = m_1y + 1, l_2: x = m_2y + 1$,

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$,

当 $m_1 + m_2 = 0$ 时, 由对称性得 $\frac{|MG|}{|MH|} = 1$,5 分

当 $m_1 + m_2 \neq 0$ 时, 联立方程 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ x = m_1y + 1 \end{cases}$, 得 $(m_1^2 + 4)y^2 + 2m_1y - 3 = 0, \Delta > 0$ 恒成立,

$y_1 + y_2 = \frac{-2m_1}{m_1^2 + 4}, y_1y_2 = \frac{-3}{m_1^2 + 4}$, 同理可得: $y_3 + y_4 = \frac{-2m_2}{m_2^2 + 4}, y_3y_4 = \frac{-3}{m_2^2 + 4}$,6 分

直线 AC 方程: $y - y_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x - x_1)$,

令 $x = 1$, 得 $y_G = y_1 + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(1 - x_1) = y_1 - m_1y_1 \frac{y_3 - y_1}{m_2y_3 - m_1y_1} = \frac{(m_2 - m_1)y_1y_3}{m_2y_3 - m_1y_1}$,

同理: $y_H = \frac{(m_2 - m_1)y_2y_4}{m_2y_4 - m_1y_2}$,8 分

$$\begin{aligned} \therefore y_G + y_H &= \frac{(m_2 - m_1)y_1y_3}{m_2y_3 - m_1y_1} + \frac{(m_2 - m_1)y_2y_4}{m_2y_4 - m_1y_2} \\ &= (m_2 - m_1) \frac{y_1y_3(m_2y_4 - m_1y_2) + y_2y_4(m_2y_3 - m_1y_1)}{(m_2y_3 - m_1y_1)(m_2y_4 - m_1y_2)} \\ &= (m_2 - m_1) \frac{m_2y_3y_4(y_1 + y_2) - m_1y_1y_2(y_3 + y_4)}{(m_2y_3 - m_1y_1)(m_2y_4 - m_1y_2)} \\ &= (m_2 - m_1) \frac{\frac{-3m_2}{m_2^2 + 4} \cdot \frac{-2m_1}{m_1^2 + 4} - \frac{-3m_1}{m_1^2 + 4} \cdot \frac{-2m_2}{m_2^2 + 4}}{(m_2y_3 - m_1y_1)(m_2y_4 - m_1y_2)} = 0, \end{aligned}$$

$\therefore \frac{|MG|}{|MH|} = 1$,10 分

当 l_1, l_2 斜率之一为 0 时, 不妨设 l_1 斜率为 0, 则 $A(-2, 0), B(2, 0)$,

直线 AC 方程: $y = \frac{y_3}{x_3 + 2}(x + 2)$, 直线 BD 方程: $y = \frac{y_4}{x_4 - 2}(x - 2)$,

令 $x = 1$, 得 $y_G = \frac{3y_3}{x_3 + 2} = \frac{3y_3}{m_2y_3 + 3}, y_H = \frac{-y_4}{x_4 - 2} = \frac{-y_4}{m_2y_4 - 1}$,

$\therefore y_G + y_H = \frac{3y_3}{m_2y_3 + 3} + \frac{-y_4}{m_2y_4 - 1} = \frac{2m_2y_3y_4 - 3(y_3 + y_4)}{(m_2y_3 + 3)(m_2y_4 - 1)} = 0, \therefore \frac{|MG|}{|MH|} = 1$,

综上: $\frac{|MG|}{|MH|} = 1$12 分

22. (10 分)

解: (1) 由 $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$ 变形得 $\begin{cases} x^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \\ y^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2 \end{cases}$,2 分

则有 $x^2 - y^2 = 4$, $\therefore$ 曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 - y^2 = 4$,3 分

$\therefore \rho = 2\sin\theta$, 即 $\rho^2 = 2\rho\sin\theta$,

由 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ 代入得, $x^2 + y^2 - 2y = 0$,

$\therefore$ 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2y = 0$;5 分

(2) 由 (1) 得曲线 C_2 是以 $C_2(0,1)$ 为圆心, $r=1$ 的圆,

$$\therefore |AB|_{\min} = |AC_2|_{\min} - 1, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{设 } A(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}), \quad t \in \mathbf{R},$$

$$\text{则 } |AC_2| = \sqrt{(t + \frac{1}{t})^2 + (t - \frac{1}{t} - 1)^2} = \sqrt{2(t^2 + \frac{1}{t^2}) - 2(t - \frac{1}{t}) + 1}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{设 } m = t - \frac{1}{t} \in \mathbf{R}, \quad \therefore |AC_2| = \sqrt{2m^2 - 2m + 5},$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, } |AC_2|_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore |AB|_{\min} = |AC_2|_{\min} - 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. (10 分)

$$\text{解: (1) 由 } a^2 + 4b^2 + c^2 - 2c = 2, \text{ 得 } a^2 + 4b^2 + (c-1)^2 = 3, \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{由柯西不等式有 } [a^2 + (2b)^2 + (c-1)^2](1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + 2b + c - 1)^2, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore a + 2b + c - 1 \leq 3, \text{ 当且仅当 } a = 2b = c - 1 = 1 \text{ 时等号成立,}$$

$$\therefore a + 2b + c \leq 4, \text{ 当且仅当 } a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 2 \text{ 时等号成立; } \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由 $a = 2b$ 可得

$$(\frac{1}{b} + \frac{1}{c-1})(a + 2b + c - 1) = (\frac{1}{b} + \frac{1}{c-1})[4b + (c-1)] = 5 + \frac{4b}{c-1} + \frac{c-1}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4b}{c-1} \cdot \frac{c-1}{b}} = 9, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

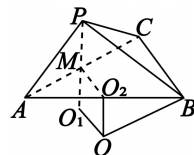
当且仅当 $c-1=2b$ 时取等,

$$\text{由 (1) 可得 } \frac{1}{a + 2b + c - 1} \geq \frac{1}{3}, \text{ 当且仅当 } a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 2 \text{ 时等号成立,}$$

$$\text{从而 } \frac{1}{b} + \frac{1}{c-1} \geq 9 \cdot \frac{1}{a + 2b + c - 1} \geq 3, \text{ 当且仅当 } a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 2 \text{ 时等号成立. } \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

解析：

- 解： $A = \{x | -1 \leq x < 1\}$, $B = \{x | 0 < x \leq 1\}$, $\therefore A \cap B = (0, 1)$, 故选 D.
- 解： 原式 $= -\sin 43^\circ \cos 17^\circ - \cos 43^\circ \sin 17^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选 C.
- 解： 中位数 $m = 80 + \frac{0.1}{0.4} \times 10 = 82.5$, $\therefore$ 评价是良好, 故选 B.
- 解： 由 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$, $\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{2}$, $\therefore$ 渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{2}x$, 故选 B.
- 解： 利用 $\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}$ 计算即得, 故选 A.
- 解： 由三视图可知该四棱台为正四棱台, 且腰长为 $\sqrt{2}$, 则该棱台的高为 $\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} = 1$, $\therefore$ 棱台的体积 $V = \frac{1}{3} \times (4 + 16 + \sqrt{4 \times 16}) \times 1 = \frac{28}{3}$, 故选 A.
- 解： 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$, $x \in [1, 2]$, $\therefore f(x)$ 是 $[-2, 2]$ 上的奇函数, $\therefore f(x)$ 的值域为 $[-2, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2]$, $\therefore f(x)$ 的最小值是 -2 , 故选 A.
- 解： 图形 P_n 的边数为 $3 \times 4^{n-1}$, 边长为 $(\frac{1}{3})^{n-1}$, $\therefore$ 周长为 $3 \times (\frac{4}{3})^{n-1}$, $\therefore n = 4$ 时, 周长为 $3 \times (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{9}$, 故选 D.
- 解： 基本事件有：1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 满足要求的有：1010, 0101, $\therefore P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 故选 C.
- 解： $\because$ 直线 $x = x_1$, $x = x_2$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ 图象的任意两条对称轴, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$, $\therefore \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2$, 即 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$,
令 $2x + \frac{\pi}{6} \in [2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$, $k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x \in [k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}]$, $k \in \mathbf{Z}$,
 $\therefore f(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}]$, $k \in \mathbf{Z}$, 故选 B.
- 解： 如图, 设 M 为 AC 的中点, O_2 为 AB 的中点, O_1 为 $\triangle APC$ 的外心, O 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心, 则 $OO_2 \perp$ 面 ABC , $OO_1 \perp$ 面 APC . 由题意得 $\angle ACB = 90^\circ$, $\therefore O_2$ 为 $\triangle ABC$ 的外心, 在 $\triangle APC$ 中, 易知 $\angle APC = 120^\circ$, $AP = PC = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$, 即 $O_1M = 1$, 而易证四边形 OO_1MO_2 为矩形, $\therefore OO_2 = O_1M = 1$, 设外接球半径为 R , 则 $R^2 = O_2B^2 + O_2O^2 = 5$, $\therefore$ 外接球表面积 $4\pi R^2 = 20\pi$, 故选 B.
- 解： 令 $g(x) = e^x - ax \ln x - ex$, 则 $g'(x) = e^x - a \ln x - a - e$, 且 $g(1) = 0$, $g'(1) = -a$, 当 $a = 1$ 时, $g'(1) = -1 < 0$, $\therefore$ 存在一个较小的数 ε 使得 $\forall x \in (1, 1 + \varepsilon)$ 都有 $g(x) < 0$,



当 $a = -1$ 时, $g'(1) = 1 > 0$, $\therefore$ 存在一个较小的数 ε 使得 $\forall x \in (1 - \varepsilon, 1)$ 都有 $g(x) < 0$, $\therefore A, C$ 都不正确,

对于选项 B, 当 $x \in (0, 1]$, 则 $f(x) = e^x - ex \ln x > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) = e^x - e(\ln x + 1) = h(x)$,

$h'(x) = e^x - \frac{e}{x} = e(e^{x-1} - \frac{1}{x}) > 0$, $\therefore h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单增, 则 $h(x) > h(1) = 0$, 即 $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$

单增, 则 $f(x) > f(1) = e > 0$, 即 $f(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 的零点个数为 0, 所以选项 B 正确,

对于选项 D, 当 $x \in [1, +\infty)$, 则 $f(x) = e^x + ex \ln x > 0$, 当 $x \in (0, 1]$, 易得到 $x \ln x \geq -\frac{1}{e}$,

$\therefore f(x) = e^x + ex \ln x \geq e^x + e(-\frac{1}{e}) = e^x - 1 > 0$, $\therefore f(x)$ 的零点个数为 0, $\therefore$ 选项 D 不正确, 故选 B.

13. 解: $\frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1+i$, $\therefore$ 模长为 $\sqrt{2}$. 故答案为 $\sqrt{2}$.

14. 解: 注意到 $\log_2 2 = 1$, 在同一坐标系中作出 $y = \sin x$ 与 $y = \log_2 x$ 的图象, 易知零点个数为 1, 故答案为 1. 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

15. 解: 在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理 $\frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{AC}{\sin \angle CDA} \Rightarrow \sin \angle ACD = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $\angle ACD = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore \angle CAB = \frac{5\pi}{12}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可得 $AB = \sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \angle CAB = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$, 故答案为 $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

16. 解: 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, AB 中点 $M(x_0, y_0)$, 设斜率为 k , 则 $\begin{cases} y_1^2 = 4x_1 \\ y_2^2 = 4x_2 \end{cases}$,

相减得: $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{y_1 + y_2} = \frac{2}{y_0}$,

$\therefore k_{MD} = \frac{y_0}{x_0 - 4} = -\frac{1}{k} = -\frac{y_0}{2}$, 即 $x_0 = 2$, $\therefore |AF| + |BF| = x_1 + x_2 + 2 = 2x_0 + 2 = 6$, 故答案为 6.