

2023 届高三第三次联考

理科数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号和考籍号用 0.5 毫米黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。
2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。
3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A = \{x | \frac{x+1}{x-1} \leq 0\}$, $B = \{x | \lg x \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $[-1, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $[0, 1)$ D. $(0, 1)$

2. $\sin 2023^\circ \cos 17^\circ + \cos 2023^\circ \sin 17^\circ =$

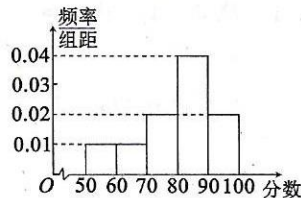
- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 校园环境对学生的成长是重要的，好的校园环境离不开学校的后勤部门。学校为了评估后勤部门的工作，采用随机抽样的方法调查 100 名学生对校园环境的认可程度（100 分制），评价标准如下：

中位数 m	$m \geq 85$	$80 \leq m < 85$	$70 \leq m < 80$	$m < 70$
评价	优秀	良好	合格	不合格

2023 年的一次调查所得的分数频率分布直方图如图所示，则这次调查对后勤部门的评价是

- A. 优秀
B. 良好
C. 合格
D. 不合格



4. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 其渐近线方程为

- A. $y = \pm 2x$ B. $y = \pm \sqrt{2}x$
C. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ D. $y = \pm \frac{1}{2}x$

5. 在平面直角坐标系中， O 为坐标原点，已知 $A(-3, -4)$, $B(5, -12)$, 则 $\cos \angle OAB =$

- A. $\frac{33}{65}$ B. $-\frac{33}{65}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

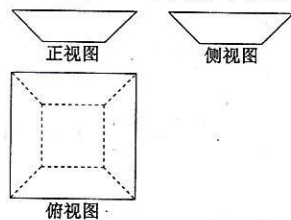
6. 一个四棱台的三视图如图所示，其中正视图和侧视图均为上底长为4，下底长为2，腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰梯形，则该四棱台的体积为

A. $\frac{28}{3}$

B. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$

C. 28

D. $28\sqrt{2}$



7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数，且当 $x \in (0, 2]$ 时， $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ，则 $f(x)$ 的最小值是

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

8. 分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学。作为当今世界十分风靡和活跃的新理论、新学科，它的出现使人们重新审视这个世界：世界是非线性的，分形无处不在。分形几何学不仅让人们感悟到科学与艺术的融合，数学与艺术审美的统一，而且还具有深刻的科学方法论意义，由此可见分形的重要性。美国物理学大师 John Wheeler 曾说过：今后谁不熟悉分形，谁就不能被称为科学上的文化人。Koch 雪花曲线是一种典型的分形曲线，它的制作步骤如下：

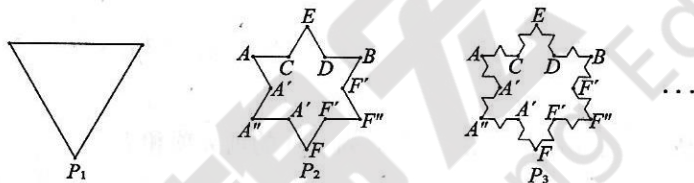
第一步：任意画一个正三角形，记为 P_1 ，并把 P_1 的每一条边三等分；

第二步：以三等分后的每一条边中间一段为边向外作正三角形，并把这“中间一段”擦掉，记所得图形为 P_2 ；

第三步：把 P_2 的每一条边三等分，重复第二步的制作，记所得图形为 P_3 ；

同样的制作步骤重复下去，可以得到 $P_4, P_5, \dots$ ，直到无穷，所画出的曲线叫做 Koch 雪花曲线。

若下图中 P_1 的边长为 1，则图形 P_4 的周长为



A. 6

B. $\frac{16}{9}$

C. $\frac{16}{3}$

D. $\frac{64}{9}$

9. 将 3 个 1 和 3 个 0 随机排成一行，则 3 个 0 都不相邻的概率是

A. $\frac{1}{20}$

B. $\frac{2}{15}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{1}{2}$

10. 已知直线 $x = x_1$, $x = x_2$ 是函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0)$ 图象的任意两条对称轴，且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$ ，则 $f(x)$ 的单调递增区间是

A. $[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}]$, $k \in \mathbb{Z}$

B. $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}]$, $k \in \mathbb{Z}$

C. $[2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{4\pi}{3}]$, $k \in \mathbb{Z}$

D. $[2k\pi - \frac{\pi}{12}, 2k\pi + \frac{5\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$

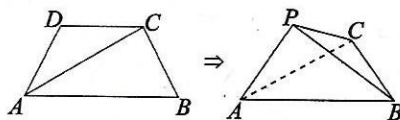
11. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB = 4$ ， $BC = CD = DA = 2$ ，将 $\triangle ACD$ 沿 AC 边折起，使得点 D 翻折到点 P ，若三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积为 20π ，则 $PB =$

A. 8

B. 4

C. $2\sqrt{2}$

D. 2



12. 设函数 $f(x) = e^x - ax \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, e 是自然对数的底数 ($e \approx 2.71828 \dots$). 则

A. 当 $a=1$ 时, $f(x) \geq ex$

B. 当 $a = \frac{e^3}{4}$ 时, $f(x) > 0$

C. 当 $a=-1$ 时, $f(x) \geq ex$

D. 当 $a = -\frac{e^3}{4}$ 时, $f(x) > 0$

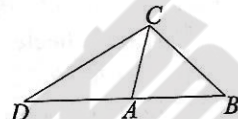
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设 i 是虚数单位，复数 $\frac{2i}{1+i}$ 的模长为_____.

14. 函数 $f(x) = \sin x - \log_2 x$ 的零点个数为_____.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = \sqrt{2}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$. 延长 BA 到点 D ,

使得 $AD = 2$, $\angle CDA = \frac{\pi}{6}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



16. 若 A, B 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上不同的两点，线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 $D(4, 0)$, 则 $|AB|$ 的最大值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = 4S_2$, $a_{3n} = 3a_n + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求 a_n ;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $\log_2 b_n = a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

随着蓉城生态公园绿道全环贯通，环城绿道骑行成为最热门的户外休闲方式之一。环城绿道全程约 100 公里，不仅可以绕蓉城一圈，更能 360 度无死角欣赏蓉城这座城市的发展与魅力。某位同学近半年来骑行了 5 次，各次骑行期间的身体综合指标评分 x 与对应应用时 y (单位：小时) 如下表：

身体综合指标评分 (x)	1	2	3	4	5
用时 (y /小时)	9.5	8.6	7.8	7	6.1

(1) 由上表数据看出，可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，请用相关系数加以说明；

(2) 建立 y 关于 x 的回归方程。

参考数据和参考公式：

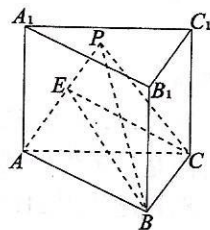
$$\text{相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \quad \sqrt{7060} \approx 84.$$

19. (12分)

如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $6\sqrt{3}$, $AB=2\sqrt{3}$, P 是面 $A_1B_1C_1$ 内不同于顶点的一点, 且 $\angle PAB = \angle PAC$.

(1) 求证: $AP \perp BC$;

(2) 经过 BC 且与 AP 垂直的平面交 AP 于点 E , 当三棱锥 $E-ABC$ 的体积最大时, 求二面角 $P-BC-B_1$ 平面角的余弦值.



20. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设直线 $l: x=1$ 与 x 轴交于点 M , 过 M 作直线 l_1, l_2 , l_1 交 E 于 A, B 两点, l_2 交 E 于 C, D 两点. 已知直线 AC 交 l 于点 G , 直线 BD 交 l 于点 H . 试探究 $\frac{|MG|}{|MH|}$ 是否为定值, 若为定值, 求出定值; 若不为定值, 说明理由.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - m) + \frac{m(x-1)}{x^2 - m}$, 其中 $m > 0$.

(1) 当 $m=1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;(2) 若对任意的 $x \in (\sqrt{m}, +\infty)$, 都有 $f(x) \geq 1$.(i) 求实数 m 的取值范围;(ii) 证明: 对任意的 $t > 1$, 都有 $\frac{1}{2} \ln(t^2 - t) \leq t\sqrt{1+t} - t - 1$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t}, \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$.

(1) 求曲线 C_1 及曲线 C_2 的直角坐标方程;(2) 设点 A 在曲线 C_1 上, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $|AB|$ 的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知 $a > 0$, $b > 0$, $c > 1$, 且 $a^2 + 4b^2 + c^2 - 2c = 2$, 证明:

(1) $a + 2b + c \leq 4$;(2) 若 $a = 2b$, 则 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c-1} \geq 3$.