

2023 届高三第三次联考

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	C	B	B	D	A	A	D	C	B	C	B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\sqrt{2}$ 14. 1 15. $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ 16. 6

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分)

解：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由 $S_4 = 4S_2$ 得， $4a_1 + 6d = 4(2a_1 + d)$ ，解得 $d = 2a_1$ ，……………1 分

而 $a_1 + (3n-1)d = 3[a_1 + (n-1)d] + 2$ ，即 $2d = 2a_1 + 2$ ，……………3 分

于是 $d = 2$ ， $a_1 = 1$ ，……………5 分

$\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$ ；……………6 分

(2) 由 $\log_2 b_n = a_n$ 得 $b_n = 2^{a_n} = 2^{2n-1}$ ，……………8 分

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，4 为公比的等比数列，……………9 分

$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(1-4^n)}{1-4} = \frac{2(4^n-1)}{3}$ 。……………12 分

18. (12 分)

解：(1) $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ ， $\bar{y} = \frac{9.5+8.6+7.8+7+6.1}{5} = 7.8$ ，……………2 分

$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10$ ， $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 7.06$ ， $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -8.4$ ，……………4 分

$\therefore r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-8.4}{\sqrt{10 \times 7.06}} \approx -1$ ，……………6 分

相关系数近似为 -1，说明 y 与 x 的相关程度相当高，从而可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系；……………7 分

(2) 由 (1) 中数据， $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{-8.4}{10} = -0.84$ ，……………9 分

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 7.8 - (-0.84 \times 3) = 10.32$ ，……………11 分

$\therefore y$ 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = -0.84x + 10.32$ 。……………12 分

19. (12 分)

解：(1) 设线段 BC 的中点为 F ，则 $AF \perp BC$ ， $\because AB = AC$ ， $\angle PAB = \angle PAC$ ， AP 为公共边，

$\therefore \triangle PAB \cong \triangle PAC$ ， $\therefore PB = PC$ ，.....2 分

$\therefore PF \perp BC$ ，又 $AF \cap PF = F$ ， $\therefore BC \perp$ 面 APF ， $\therefore BC \perp AP$ ；.....5 分

(2) 设线段 B_1C_1 的中点为 D ，由题意，点 P 在线段 A_1D 上，

由 $V_{ABC-A_1B_1C_1} = 6\sqrt{3}$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ 得 $AA_1 = 2$ ，.....7 分

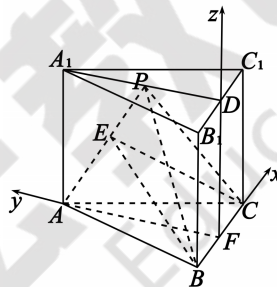
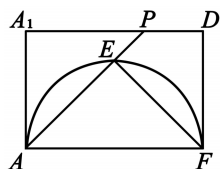
$\therefore$ 三棱锥 $E-ABC$ 的体积最大，等价于点 E 到面 ABC 的距离最大，

$\because AP \perp$ 面 BCE ， $\therefore AP \perp EF$ ， $\therefore$ 点 E 在以 AF 为直径的圆上，如图，易知 $AF = 3$ ，

从而 $\angle EAF = \angle EFA = 45^\circ$ ，.....9 分

由 (1) 知 $PF \perp BC$ ， $DF \perp BC$ ， $\therefore \angle PFD$ 为二面角 $P-BC-B_1$ 的平面角，.....10 分

如图，以 F 为原点建立空间直角坐标系，则 $F(0,0,0)$ ， $E(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ， $B(-\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $P(0, 1, 2)$ ， $D(0, 0, 2)$ ，



于是 $\overrightarrow{FP} = (0, 1, 2)$ ， $\overrightarrow{FD} = (0, 0, 2)$ ，从而 $\cos \langle \overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FD} \rangle = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，.....11 分

$\therefore$ 二面角 $P-BC-B_1$ 平面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。.....12 分

20. (12 分)

解：(1) 由题意， $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $a^2 = b^2 + c^2$ ，解得 $a^2 = 4b^2$ ，.....2 分

代入点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 得 $\frac{1}{4b^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$ ，解得 $b^2 = 1$ ， $a^2 = 4$ ，

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为： $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ；.....4 分

(2) 由题意， $M(1, 0)$ ，当 l_1, l_2 斜率都不为 0 时，设 $l_1: x = m_1y + 1$ ， $l_2: x = m_2y + 1$ ，

$A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ ， $D(x_4, y_4)$ ，

当 $m_1 + m_2 = 0$ 时，由对称性得 $\frac{|MG|}{|MH|} = 1$ ，.....5 分

当 $m_1 + m_2 \neq 0$ 时，联立方程 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ x = m_1y + 1 \end{cases}$ ，得 $(m_1^2 + 4)y^2 + 2m_1y - 3 = 0$ ， $\Delta > 0$ 恒成立，

$y_1 + y_2 = \frac{-2m_1}{m_1^2 + 4}$ ， $y_1y_2 = \frac{-3}{m_1^2 + 4}$ ，同理可得： $y_3 + y_4 = \frac{-2m_2}{m_2^2 + 4}$ ， $y_3y_4 = \frac{-3}{m_2^2 + 4}$ ，.....6 分

直线 AC 方程： $y - y_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x - x_1)$ ，

令 $x=1$ ，得 $y_G = y_1 + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(1 - x_1) = y_1 - m_1 y_1 \frac{y_3 - y_1}{m_2 y_3 - m_1 y_1} = \frac{(m_2 - m_1)y_1 y_3}{m_2 y_3 - m_1 y_1}$ ，

同理： $y_H = \frac{(m_2 - m_1)y_2 y_4}{m_2 y_4 - m_1 y_2}$ ，8 分

$$\begin{aligned} \therefore y_G + y_H &= \frac{(m_2 - m_1)y_1 y_3}{m_2 y_3 - m_1 y_1} + \frac{(m_2 - m_1)y_2 y_4}{m_2 y_4 - m_1 y_2} \\ &= (m_2 - m_1) \frac{y_1 y_3 (m_2 y_4 - m_1 y_2) + y_2 y_4 (m_2 y_3 - m_1 y_1)}{(m_2 y_3 - m_1 y_1)(m_2 y_4 - m_1 y_2)} \\ &= (m_2 - m_1) \frac{m_2 y_3 y_4 (y_1 + y_2) - m_1 y_1 y_2 (y_3 + y_4)}{(m_2 y_3 - m_1 y_1)(m_2 y_4 - m_1 y_2)} \\ &= (m_2 - m_1) \frac{\frac{-3m_2}{m_2^2 + 4} \cdot \frac{-2m_1}{m_1^2 + 4} - \frac{-3m_1}{m_1^2 + 4} \cdot \frac{-2m_2}{m_2^2 + 4}}{(m_2 y_3 - m_1 y_1)(m_2 y_4 - m_1 y_2)} = 0, \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{|MG|}{|MH|} = 1, \quad \text{.....10 分}$$

当 l_1, l_2 斜率之一为 0 时，不妨设 l_1 斜率为 0，则 $A(-2, 0), B(2, 0)$ ，

直线 AC 方程： $y = \frac{y_3}{x_3 + 2}(x + 2)$ ，直线 BD 方程： $y = \frac{y_4}{x_4 - 2}(x - 2)$ ，

令 $x=1$ ，得 $y_G = \frac{3y_3}{x_3 + 2} = \frac{3y_3}{m_2 y_3 + 3}$ ， $y_H = \frac{-y_4}{x_4 - 2} = \frac{-y_4}{m_2 y_4 - 1}$ ，

$$\therefore y_G + y_H = \frac{3y_3}{m_2 y_3 + 3} + \frac{-y_4}{m_2 y_4 - 1} = \frac{2m_2 y_3 y_4 - 3(y_3 + y_4)}{(m_2 y_3 + 3)(m_2 y_4 - 1)} = 0, \therefore \frac{|MG|}{|MH|} = 1,$$

$$\text{综上：} \frac{|MG|}{|MH|} = 1. \quad \text{.....12 分}$$

21. (12 分)

解： (1) 当 $m=1$ 时， $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + \frac{1}{x+1}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ，1 分

$$f'(x) = \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)^2}, \quad \text{.....2 分}$$

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时， $f'(x) < 0$ ；当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ，

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$ ，单调递增区间为 $(1, +\infty)$ ；4 分

$$(2) (i) f'(x) = \frac{x^3 - mx^2 + mx - m^2}{(x^2 - m)^2} = \frac{(x-m)(x^2 + m)}{(x^2 - m)^2},$$

①当 $0 < m < 1$ 时， $1 \in (\sqrt{m}, +\infty)$ ， $f(1) = \frac{1}{2} \ln(1-m) < 0 < 1$ (不合题意)；5 分

②当 $m=1$ 时， $\sqrt{2} \in (1, +\infty)$ ， $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}+1} < 1$ (不合题意)；6 分

③当 $m > 1$ 时， $m > \sqrt{m}$ ，当 $x \in (\sqrt{m}, m)$ ， $f'(x) < 0$ ；当 $x \in (m, +\infty)$ ， $f'(x) > 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(\sqrt{m}, m)$ 上单调递减；在 $(m, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x \in (\sqrt{m}, +\infty)$ 时， $f(x)$ 的最小值为 $f(m) = \frac{1}{2} \ln(m^2 - m) + 1$ ，

于是 $\frac{1}{2} \ln(m^2 - m) + 1 \geq 1$ ， $\therefore m^2 - m \geq 1$ ，解得 $m \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $m \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ，

$\because m > 1$ ， $\therefore m \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，

综上所述，实数 m 的取值范围为 $[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ 9 分

(ii) 由 (i) 可知当 $m > 1$ 时， $f(x) \geq f(m)$ ，即 $\frac{1}{2} \ln(x^2 - m) + \frac{m(x-1)}{x^2 - m} \geq \frac{1}{2} \ln(m^2 - m) + 1$ ，

当且仅当 $x = m$ 时取等，10 分

令 $x^2 - m = 1$ ，则 $m(\sqrt{1+m} - 1) \geq \frac{1}{2} \ln(m^2 - m) + 1$ ，即 $\frac{1}{2} \ln(m^2 - m) \leq m\sqrt{1+m} - m - 1$ ，

令 $m = t$ ，则 $t > 1$ ，有 $\frac{1}{2} \ln(t^2 - t) \leq t\sqrt{1+t} - t - 1$ 。12 分

22. (10 分)

解：(1) 由 $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t}, \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$ 变形得 $\begin{cases} x^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \\ y^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2 \end{cases}$ ，2 分

则有 $x^2 - y^2 = 4$ ， $\therefore$ 曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 - y^2 = 4$ ，3 分

$\because \rho = 2 \sin \theta$ ，即 $\rho^2 = 2\rho \sin \theta$ ，

由 $x = \rho \cos \theta$ ， $y = \rho \sin \theta$ 代入得， $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ，

$\therefore$ 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ；5 分

(2) 由 (1) 得曲线 C_2 是以 $C_2(0, 1)$ 为圆心， $r = 1$ 的圆，

$\therefore |AB|_{\min} = |AC_2|_{\min} - 1$ ，6 分

设 $A(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t})$ ， $t \in \mathbf{R}$ ，

则 $|AC_2| = \sqrt{(t + \frac{1}{t})^2 + (t - \frac{1}{t} - 1)^2} = \sqrt{2(t^2 + \frac{1}{t^2}) - 2(t - \frac{1}{t}) + 1}$ ，8 分

设 $m = t - \frac{1}{t} \in \mathbf{R}$ ， $\therefore |AC_2| = \sqrt{2m^2 - 2m + 5}$ ，

$\therefore$ 当 $m = \frac{1}{2}$ 时， $|AC_2|_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，9 分

$\therefore |AB|_{\min} = |AC_2|_{\min} - 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$ 。10 分

23. (10 分)

解：(1) 由 $a^2 + 4b^2 + c^2 - 2c = 2$ ，得 $a^2 + 4b^2 + (c-1)^2 = 3$ ，.....1 分由柯西不等式有 $[a^2 + (2b)^2 + (c-1)^2](1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + 2b + c - 1)^2$ ，.....3 分 $\therefore a + 2b + c - 1 \leq 3$ ，当且仅当 $a = 2b = c - 1 = 1$ 时等号成立， $\therefore a + 2b + c \leq 4$ ，当且仅当 $a = 1$ ， $b = \frac{1}{2}$ ， $c = 2$ 时等号成立；.....5 分(2) 由 $a = 2b$ 可得

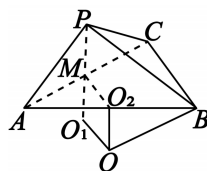
$$\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c-1}\right)(a + 2b + c - 1) = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c-1}\right)[4b + (c-1)] = 5 + \frac{4b}{c-1} + \frac{c-1}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4b}{c-1} \cdot \frac{c-1}{b}} = 9,$$

.....8 分

当且仅当 $c-1 = 2b$ 时取等，由 (1) 可得 $\frac{1}{a + 2b + c - 1} \geq \frac{1}{3}$ ，当且仅当 $a = 1$ ， $b = \frac{1}{2}$ ， $c = 2$ 时等号成立，从而 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c-1} \geq 9 \cdot \frac{1}{a + 2b + c - 1} \geq 3$ ，当且仅当 $a = 1$ ， $b = \frac{1}{2}$ ， $c = 2$ 时等号成立。.....10 分

解析：

- 解： $A = \{x | -1 \leq x < 1\}$ ， $B = \{x | 0 < x \leq 1\}$ ， $\therefore A \cap B = (0, 1)$ ， 故选 D.
- 解： 原式 $= -\sin 43^\circ \cos 17^\circ - \cos 43^\circ \sin 17^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， 故选 C.
- 解： 中位数 $m = 80 + \frac{0.1}{0.4} \times 10 = 82.5$ ， $\therefore$ 评价是良好， 故选 B.
- 解： 由 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$ ， $\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{2}$ ， $\therefore$ 渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{2}x$ ， 故选 B.
- 解： 利用 $\cos \angle OAB = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AB}|}$ 计算即得， 故选 D.
- 解： 由三视图可知该四棱台为正四棱台， 且腰长为 $\sqrt{2}$ ， 则该棱台的高为 $\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} = 1$ ， $\therefore$ 棱台的体积 $V = \frac{1}{3} \times (4 + 16 + \sqrt{4 \times 16}) \times 1 = \frac{28}{3}$ ， 故选： A.
- 解： 当 $x \in (0, 2]$ 时， $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \in [1, 2]$ ， $\therefore f(x)$ 是 $[-2, 2]$ 上的奇函数， $\therefore f(x)$ 的值域为 $[-2, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2]$ ， $\therefore f(x)$ 的最小值是 -2 ， 故选 A.
- 解： 图形 P_n 的边数为 $3 \times 4^{n-1}$ ， 边长为 $(\frac{1}{3})^{n-1}$ ， $\therefore$ 周长为 $3 \times (\frac{4}{3})^{n-1}$ ， $\therefore n = 4$ 时， 周长为 $3 \times (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{9}$ ， 故选 D.
- 解： 采用插空法得 $P = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$ ， 故选 C.
- 解： $\because f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ，
又 $\because$ 直线 $x = x_1$ ， $x = x_2$ 是函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0)$ 图象的任意两条对称轴， 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$ ， $\therefore \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 2$ ， 即 $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ，
令 $2x + \frac{\pi}{6} \in [2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ， 解得 $x \in [k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}]$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，
 $\therefore f(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}]$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ， 故选 B.
- 解： 如图， 设 M 为 AC 的中点， O_2 为 AB 的中点， O_1 为 $\triangle APC$ 的外心， O 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心， 则 $OO_2 \perp$ 面 ABC ， $OO_1 \perp$ 面 APC ． 由题意得 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\therefore O_2$ 为 $\triangle ABC$ 的外心， 设外接球半径为 R ， 则 $4\pi R^2 = 20\pi$ ， 即 $R^2 = 5$ ， 而 $O_2B = 2$ ，
 $\therefore OO_2 = 1$ ， 在 $\triangle APC$ 中， 易得 $O_1M = MP = 1$ ， 即 $OO_2 = O_1M$ ， 由 $R^2 = OP^2 = OO_1^2 + O_1P^2 = 5$ 得 $OO_1 = 1 = O_2M$ ， $\therefore$ 四边形 OO_1MO_2 为平行四边形，
而 $OO_2 \perp$ 面 ABC ， 即 $OO_2 \perp O_2M$ ， $\therefore$ 四边形 OO_1MO_2 为矩形， 即 $O_2M \perp$ 面 APC ， $\therefore BC \perp$ 面 APC ，
 $\therefore PB^2 = PM^2 + MC^2 + CB^2 = 1 + (\sqrt{3})^2 + 2^2 = 8$ ， $PB = 2\sqrt{2}$ ， 故选 C.
- 解： 令 $g(x) = e^x - ax \ln x - ex$ ， 则 $g'(x) = e^x - a \ln x - a - e$ ， 且 $g(1) = 0$ ， $g'(1) = -a$ ，
当 $a = 1$ 时， $g'(1) = -1 < 0$ ， $\therefore$ 存在一个较小的数 ε 使得 $\forall x \in (1, 1 + \varepsilon)$ 都有 $g(x) < 0$ ，



当 $a = -1$ 时, $g'(1) = 1 > 0$, $\therefore$ 存在一个较小的数 ε 使得 $\forall x \in (1 - \varepsilon, 1)$ 都有 $g(x) < 0$, $\therefore A, C$ 都不正确,

对于选项 B, 当 $x \in (0, 1]$, 则显然成立, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 即证明 $e^x - \frac{e^3}{4}x \ln x > 0$, 也即证明

$$\frac{4}{e^3} \cdot \frac{e^x}{x^2} > \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (1, +\infty), \quad h_1(x) = \frac{e^x}{x^2} \text{ 的最小值为 } h_1(2) = \frac{e^2}{4}, \quad h_2(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ 的最大值为 } h_2(e) = \frac{1}{e},$$

$$\therefore \frac{4}{e^3} \cdot \frac{e^x}{x^2} = \frac{4}{e^3} h_1(x) \geq \frac{4}{e^3} h_1(2) = \frac{4}{e^3} \cdot \frac{e^2}{4} = \frac{1}{e} = h_2(e) \geq h_2(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 注意不同时取等, } \therefore \frac{4}{e^3} \cdot \frac{e^x}{x^2} > \frac{\ln x}{x}, \therefore \text{选}$$

项 B 正确,

对于选项 D, 当 $x = \frac{1}{e}$ 时, $e^{\frac{1}{e}} + \frac{e^3}{4} \cdot \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = e^{\frac{1}{e}} - \frac{e^2}{4} < e^{\frac{1}{2}} - \frac{e^2}{4} < 0 \Leftrightarrow e < \frac{e^4}{16} \Leftrightarrow 16 < e^3$ (成立), 即 $f(\frac{1}{e}) < 0$,

所以选项 D 不正确.

故选 B.

13. 解: $\frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1+i$, $\therefore$ 模长为 $\sqrt{2}$. 故答案为 $\sqrt{2}$.

14. 解: 注意到 $\log_2 2 = 1$, 作图易知零点个数为 1, 故答案为 1.

15. 解: 在 $\triangle ADC$ 中, 由正弦定理 $\frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{AC}{\sin \angle CDA} \Rightarrow \sin \angle ACD = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $\angle ACD = \frac{\pi}{4}$,

$$\therefore \angle CAB = \frac{5\pi}{12}, \angle ABC = \frac{\pi}{4}, \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, 由正弦定理可得 } AB = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \angle CAB = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, \text{ 故答案为 } \frac{3+\sqrt{3}}{4}.$$

16. 解: 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, AB 中点 $M(x_0, y_0)$, 设斜率为 k , 则 $\begin{cases} y_1^2 = 4x_1 \\ y_2^2 = 4x_2 \end{cases}$,

$$\text{相减得: } k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{y_1 + y_2} = \frac{2}{y_0},$$

$$\therefore k_{MD} = \frac{y_0}{x_0 - 4} = -\frac{1}{k} = -\frac{y_0}{2}, \text{ 即 } x_0 = 2, \text{ 设抛物线的焦点为 } F, |AF| + |BF| = x_1 + x_2 + 2 = 2x_0 + 2 = 6,$$

$\therefore |AB| \leq |AF| + |BF| = 6$, 当且仅当 A, B, F 三点共线时等号成立,

此时 $M(2, \pm\sqrt{2})$ 满足在抛物线内部, $\therefore |AB|$ 的最大值为 6, 故答案为 6.