

成都七中高 2023 届三诊模拟考试数学（文科参考答案）

### 一. 选择题

1—5: DABDA    6—10: CDCBD    11—12: CB

12.解: 因为  $f(b)=0$ ,  $x=b$  是函数  $f(x)$  的极小值点, 结合三次函数的图象可设

$$f(x) = (x-b)^2(x+m), \quad \forall f(x) = (x-b)(x^2+ax+b),$$

令  $x=0$  得  $b^2m=-b^2$ ,  $m=-1$ , 即  $f(x)=(x-1)(x-b)^2$ ,

$$f'(x) = 3x^2 - (4b+2)x + b^2 + 2b = (x-b)(3x-b-2), \text{ 由 } f'(x)=0 \text{ 得 } x_1=b, \quad x_2=\frac{b+2}{3},$$

$x=b$  是极小值点, 则  $x=\frac{b+2}{3}$  是极大值点,  $b > \frac{b+2}{3}$ , 所以  $b > 1$ .

## 二、填空题

13.  $-\sqrt{2}$       14. 10      15. 20      16. 108

### 三. 解答题

17.解：(1)  $\because \theta = \frac{\pi}{3}$ ，此时  $\angle PAB = \frac{2\pi}{3}$ ，由余弦定理可知

(2)  $\triangle PAC$  中,  $\angle PCA = \pi - 2\theta$ , 由正弦定理可知,  $\frac{PA}{\sin(\pi - 2\theta)} = \frac{PC}{\sin \theta} = \frac{2}{\sin \theta}$

$$\therefore S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2} 4 \cos \theta \cdot 2 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{3} + \theta \right) = 4 \cos \theta \sin \left( \frac{\pi}{3} + \theta \right) = \sin 2\theta + \sqrt{3} \cos 2\theta + \sqrt{3}$$

即  $S_{\Delta PAB} = 2 \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}$ ，当且仅当  $\theta = \frac{\pi}{12}$  时面积取得最大值.

$\therefore \triangle PAB$  面积的取值范围为  $(0, 2 + \sqrt{3}]$ . ..... 12 分

18. 解: (1) 因为前两个矩形的面积之和为 $(0.01+0.03)\times 10=0.4 < 0.5$ , 前三个矩形面积为 $(0.01+0.03+0.04)\times 10=0.8 > 0.5$ ,

所以中位数在(80,90)之间，设中位数为 $x$ ，

则  $10 \times (0.01 + 0.03) + (x - 80) \times 0.04 = 0.5$ , 解得  $x = 82.5$ , 故中位数为 82.5. .... 6 分

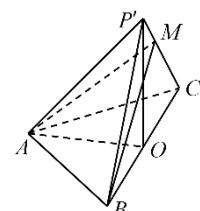
(2) 由题意可得, 成绩在 $[80,90]$ 上的概率为0.4, 即有4名同学, 其中2男2女.

其中至少有一个女生的概率为 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ . ..... 12分

19. 解：(1) 取  $BC$  中点  $O$ , 连接  $AO$ ,  $P'O$ , 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形,  $O$ 为 $BC$ 的中点, 则 $AO \perp BC$ ,

又  $BC \perp P'A$ ,  $AO \cap AP' = A$ ,  $AO, AP' \subset \text{平面 } AP'O$ ,

$\therefore BC \perp$ 平面  $AP'O$ , 所以平面  $AP'O$  即为平面  $\alpha$ . .... 6 分



(2) 由(1)可知, 因为 $PO \perp$ 平面 $ABC$ ,  $AO \perp BC$ ,  $V_{C-AMB} = V_{M-ABC} = \frac{2}{3}V_{P-ABC}$ .

20. 解: (1) 由题椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $|PF_1| + |PF_2| = 4$ , 可得  $a = 2$ , 又因为点  $P(1, -\frac{3}{2})$  在椭圆  $C_1$  上,

即  $\frac{1}{4} + \frac{9}{4b^2} = 1$ , 得  $b^2 = 3$ , 所以椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . ..... 4 分

(2) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_p, y_p)$ .

因为直线  $PA$ 、 $PB$  的倾斜角互补，且  $A$ ， $B$  是不同的点，所以直线  $PA$ 、 $PB$  都必须有斜率，

设直线  $PA$  方程为  $y = k(x-1) - \frac{3}{2}$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x-1) - \frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 整理得 } (3+4k^2)x^2 - (8k^2 + 12k)x + 4k^2 + 12k - 3 = 0, \dots\dots 7 \text{ 分}$$

A 和 P 点横坐标即为方程两个根，当  $\Delta > 0$  时，可得

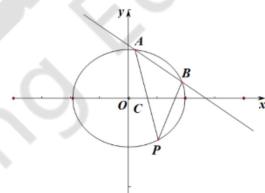
$$x_A + x_P = \frac{8k^2 + 12k}{3 + 4k^2}, \text{ 因为 } x_P = 1, \text{ 所以 } x_A = \frac{4k^2 + 12k - 3}{3 + 4k^2},$$

代入直线  $PA$  可得  $y_A = \frac{12k^2 - 12k - 9}{6 + 8k^2}$ ,

即  $A\left(\frac{4k^2+12k-3}{3+4k^2}, \frac{12k^2-12k-9}{6+8k^2}\right)$ , 又因为直线  $PA$ 、 $PB$  的倾斜角互补, 将  $k$  换成  $-k$ ,

$$\text{可得 } B\left(\frac{4k^2 - 12k - 3}{3 + 4k^2}, \frac{12k^2 + 12k - 9}{6 + 8k^2}\right),$$

两点求斜率可得出  $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{2}$ , 所以直线  $AB$  的斜率为  $-\frac{1}{2}$ . ..... 12 分



21.解: (1)  $f'(x) = -\sin x + x$ , 且  $f'(0) = 0$ . 令  $g(x) = f'(x)$ , 则  $g'(x) = -\cos x + 1$ .

易知  $g'(x) \geq 0$ , 则  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增.

当  $x > 0$  时,  $g(x) = f'(x) > g(0) = 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $g(x) = f'(x) < g(0) = 0$ .

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

$\therefore x=0$  是函数  $f(x)$  的极小值点.

$\therefore f(x)_{\text{极小值}} = f(0) = 0$ , 无极大值. .... 5 分

(2)由(1)的证明可知,当 $a=1$ 且 $x>0$ 时,  $-\sin x+x>0$ 即

(2)由(1)的证明可知,当 $a=1$ 且 $x>0$ 时,  $-\sin x+x>0$ 即  
 $\sin \frac{1}{2}+\sin \frac{2}{3}+\sin \frac{3}{4}+\cdots+\sin \frac{2023}{2024}<\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2023}{2024}$ .

$$\text{令 } S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{2023}{2^{2023}},$$

$$\text{则 } \frac{1}{2}S = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \cdots + \frac{2023}{2^{2024}},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2023}} - \frac{2023}{2^{2024}},$$

$$\text{化简可得 } S = 2 \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{2023} - \frac{2023}{2^{2024}} \right) < 2,$$

$$22 \text{ 解: (1) 因为} \begin{cases} x = 1 + \frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}, \\ y = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}, \end{cases} \text{ 所以} \begin{cases} x = \frac{1}{\cos 2\alpha} \quad ①, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \tan 2\alpha \quad ②, \end{cases}$$

$$\textcircled{1}^2 - 2 \times \textcircled{2}^2 \text{ 得 } x^2 - 2y^2 = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = 1, \dots$$

由  $\theta = \frac{\pi}{6}$ , 得  $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta$ ,

所以  $\rho \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \rho \cos \theta$ , 所以  $y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$ ,

所以  $C$  的普通方程为  $x^2 - 2y^2 = 1$ ,  $l$  的直角坐标方程为  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ . ..... 5 分

$$(2) \text{ 联立} \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases} \text{ 得} \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或} \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

所以  $l$  与  $C$  交点的直角坐标分别为  $(\sqrt{3}, 1)$ ,  $(-\sqrt{3}, -1)$ ,

设点 $(\sqrt{3}, 1)$ 的极坐标为 $(\rho_1, \theta_1)$ ,  $\rho_1 \geq 0$ ,  $\theta_1 \in [0, 2\pi)$ ,

$$\text{则 } \rho_1 = \sqrt{3+1} = 2, \quad \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta_1 = \frac{1}{2},$$

所以  $\rho_1 = 2$ ,  $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ ,

所以点 $(\sqrt{3}, 1)$ 的极坐标为 $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ ,

同理可得点 $(-\sqrt{3}, -1)$ 的极坐标为 $\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$ ,

故  $l$  与  $C$  交点的极坐标为  $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\left(2, \frac{7\pi}{6}\right)$ .

(注: 由教材选修 4-4 的 P11 旁侧备注可知, 一般情况只要取  $\rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$ .)

23. 解: (1) 当  $a=2$  时, 原不等式可化为  $|3x-1|+|x-2|\geq 3$ .

①当  $x \leq \frac{1}{3}$  时,  $1-3x+2-x=3-4x \geq 3$ , 解得:  $x \leq 0$ , ∴  $x \leq 0$ ;

②当  $\frac{1}{3} < x < 2$  时,  $3x-1+2-x=2x+1 \geq 3$ , 解得:  $x \geq 1$ ,  $\therefore 1 \leq x < 2$ ;

③当  $x \geq 2$  时,  $3x-1+x-2=4x-3 \geq 3$ , 解得:  $x \geq \frac{3}{2}$ ,  $\therefore x \geq 2$ ;

综上所述: 不等式  $\left|x - \frac{1}{3}\right| + f(x) \geq 1$  的解集为  $\{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$ . ..... 5 分

(2) 由  $\left|x - \frac{1}{3}\right| + f(x) \leq x$  知:  $|3x-1| + |x-a| \leq 3x$ ,

$\because \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \subseteq M$ ,  $\therefore |3x-1| + |x-a| \leq 3x$  在  $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$  上恒成立,

$\therefore 3x-1 + |x-a| \leq 3x$ , 即  $|x-a| \leq 1$ ,  $\therefore -1 \leq x-a \leq 1$ , 解得:  $a-1 \leq x \leq a+1$ ,

$\therefore \begin{cases} a-1 \leq \frac{1}{3} \\ a+1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ , 解得:  $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{4}{3}$ , 即实数  $a$  的取值范围为  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$ . ..... 10 分

