

## 成都七中高 2023 届三诊模拟考试数学（文科参考答案）

## 一. 选择题

1—5: DABDA 6—10: CDCBD 11—12: CB

12. 解: 因为  $f(b)=0$ ,  $x=b$  是函数  $f(x)$  的极小值点, 结合三次函数的图象可设

$$f(x)=(x-b)^2(x+m), \text{ 又 } f(x)=(x-b)(x^2+ax+b),$$

令  $x=0$  得  $b^2m=-b^2$ ,  $m=-1$ , 即  $f(x)=(x-1)(x-b)^2$ ,

$$f'(x)=3x^2-(4b+2)x+b^2+2b=(x-b)(3x-b-2), \text{ 由 } f'(x)=0 \text{ 得 } x_1=b, \quad x_2=\frac{b+2}{3},$$

 $x=b$  是极小值点, 则  $x=\frac{b+2}{3}$  是极大值点,  $b>\frac{b+2}{3}$ , 所以  $b>1$ .

## 二. 填空题

13.  $-\sqrt{2}$  14. 10 15. 20 16. 108

## 三. 解答题

17. 解: (1)  $\because \theta = \frac{\pi}{3}$ , 此时  $\angle PAB = \frac{2\pi}{3}$ , 由余弦定理可知

$$PB^2 = 8 - 8\cos\frac{2\pi}{3} = 12 \therefore PB = 2\sqrt{3} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2)  $\triangle PAC$  中,  $\angle PCA = \pi - 2\theta$ , 由正弦定理可知,  $\frac{PA}{\sin(\pi - 2\theta)} = \frac{PC}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin\theta}$

$$\therefore PA = \frac{2\sin(\pi - 2\theta)}{\sin\theta} = 4\cos\theta. \quad S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} PA \cdot AB \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} 4\cos\theta \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = 4\cos\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta + \sqrt{3}$$

即  $S_{\triangle PAB} = 2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}$ , 当且仅当  $\theta = \frac{\pi}{12}$  时面积取得最大值.

$\therefore \triangle PAB$  面积的取值范围为  $(0, 2 + \sqrt{3}]$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

18. 解: (1) 因为前两个矩形的面积之和为  $(0.01+0.03)\times 10=0.4 < 0.5$ , 前三个矩形面积为  $(0.01+0.03+0.04)\times 10=0.8 > 0.5$ ,

所以中位数在  $(80, 90)$  之间, 设中位数为  $x$ ,则  $10\times(0.01+0.03)+(x-80)\times 0.04=0.5$ , 解得  $x=82.5$ , 故中位数为 82.5.  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$ 

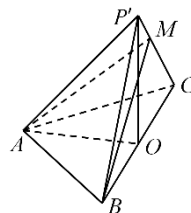
(2) 由题意可得, 成绩在  $[80, 90]$  上的概率为 0.4, 即有 4 名同学, 其中 2 男 2 女.

其中至少有一个女生的概率为  $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. 解: (1) 取  $BC$  中点  $O$ , 连接  $AO$ ,  $P'O$ , 因为  $\triangle ABC$  为等边三角形,  $O$  为  $BC$  的中点, 则  $AO \perp BC$ ,

又  $BC \perp P'A$ ,  $AO \cap AP' = A$ ,  $AO, AP' \subset$  平面  $AP'O$ ,

$\therefore BC \perp$  平面  $AP'O$ , 所以平面  $AP'O$  即为平面  $\alpha$ .  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$



(2) 由(1)可知, 因为  $PO \perp$  平面  $ABC$ ,  $AO \perp BC$ ,  $V_{C-AMB} = V_{M-ABC} = \frac{2}{3}V_{P-ABC}$ .

$$\text{又 } V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \cdot PO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 1, \therefore V_{C-AMB} = \frac{2}{3}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 由题椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $|PF_1| + |PF_2| = 4$ , 可得  $a = 2$ , 又因为点

$P(1, -\frac{3}{2})$  在椭圆  $C_1$  上,

$$\text{即 } \frac{1}{4} + \frac{9}{4b^2} = 1, \text{ 得 } b^2 = 3, \text{ 所以椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_p, y_p)$ .

因为直线  $PA, PB$  的倾斜角互补, 且  $A, B$  是不同的点, 所以直线  $PA, PB$  都必须有斜率,

设直线  $PA$  方程为  $y = k(x-1) - \frac{3}{2}$ ,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = k(x-1) - \frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 整理得 } (3+4k^2)x^2 - (8k^2+12k)x + 4k^2+12k-3=0, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$A$  和  $P$  点横坐标即为方程两个根, 当  $\Delta > 0$  时, 可得

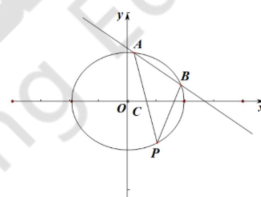
$$x_A + x_P = \frac{8k^2+12k}{3+4k^2}, \text{ 因为 } x_P = 1, \text{ 所以 } x_A = \frac{4k^2+12k-3}{3+4k^2},$$

$$\text{代入直线 } PA \text{ 可得 } y_A = \frac{12k^2-12k-9}{6+8k^2},$$

即  $A(\frac{4k^2+12k-3}{3+4k^2}, \frac{12k^2-12k-9}{6+8k^2})$ , 又因为直线  $PA, PB$  的倾斜角互补, 将  $k$  换成  $-k$ ,

$$\text{可得 } B(\frac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}, \frac{12k^2+12k-9}{6+8k^2}),$$

$$\text{两点求斜率可得出 } k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{2}, \text{ 所以直线 } AB \text{ 的斜率为 } -\frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



21. 解: (1)  $f'(x) = -\sin x + x$ , 且  $f'(0) = 0$ . 令  $g(x) = f'(x)$ , 则  $g'(x) = -\cos x + 1$ .

易知  $g'(x) \geq 0$ , 则  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增.

当  $x > 0$  时,  $g(x) = f'(x) > g(0) = 0$ ; 当  $x < 0$  时,  $g(x) = f'(x) < g(0) = 0$ .

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

$\therefore x = 0$  是函数  $f(x)$  的极小值点.

$$\therefore f(x)_{\text{极小值}} = f(0) = 0, \text{ 无极大值.} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由(1)的证明可知, 当  $a = 1$  且  $x > 0$  时,  $-\sin x + x > 0$  即  $x > 0, x > \sin x$ .

$$\sin \frac{1}{2} + \sin \frac{2}{4} + \sin \frac{3}{8} + \dots + \sin \frac{2023}{2^{2023}} < \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{2023}{2^{2023}}.$$

$$\text{令 } S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{2023}{2^{2023}},$$

$$\text{则 } \frac{1}{2}S = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \cdots + \frac{2023}{2^{2024}},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{2023}} - \frac{2023}{2^{2024}},$$

$$\text{化简可得 } S = 2 \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{2023} - \frac{2023}{2^{2024}} \right) < 2,$$

$$\text{故 } \sin \frac{1}{2} + \sin \frac{2}{4} + \sin \frac{3}{8} + \cdots + \sin \frac{2023}{2^{2023}} < 2. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22 \text{ 解: (1) 因为 } \begin{cases} x = 1 + \frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}, \\ y = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} x = \frac{1}{\cos 2\alpha} \text{ ①,} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \tan 2\alpha \text{ ②,} \end{cases}$$

$$\text{①}^2 - 2 \times \text{②}^2 \text{ 得 } x^2 - 2y^2 = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = 1, \dots$$

$$\text{由 } \theta = \frac{\pi}{6}, \text{ 得 } \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta,$$

$$\text{所以 } \rho \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \rho \cos \theta, \text{ 所以 } y = \frac{\sqrt{3}}{3} x,$$

$$\text{所以 } C \text{ 的普通方程为 } x^2 - 2y^2 = 1, l \text{ 的直角坐标方程为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3} x. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 联立 } \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} x \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases},$$

所以  $l$  与  $C$  交点的直角坐标分别为  $(\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1)$ ,

设点  $(\sqrt{3}, 1)$  的极坐标为  $(\rho_1, \theta_1)$ ,  $\rho_1 \geq 0, \theta_1 \in [0, 2\pi)$ ,

$$\text{则 } \rho_1 = \sqrt{3+1} = 2, \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta_1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \rho_1 = 2, \theta_1 = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以点 } (\sqrt{3}, 1) \text{ 的极坐标为 } \left( 2, \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\text{同理可得点 } (-\sqrt{3}, -1) \text{ 的极坐标为 } \left( 2, \frac{7\pi}{6} \right),$$

$$\text{故 } l \text{ 与 } C \text{ 交点的极坐标为 } \left( 2, \frac{\pi}{6} \right), \left( 2, \frac{7\pi}{6} \right). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(注: 由教材选修 4-4 的 P11 旁侧备注可知, 一般情况只要取  $\rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$ .)

$$23. \text{ 解: (1) 当 } a = 2 \text{ 时, 原不等式可化为 } |3x-1| + |x-2| \geq 3.$$

$$\text{① 当 } x \leq \frac{1}{3} \text{ 时, } 1-3x+2-x=3-4x \geq 3, \text{ 解得: } x \leq 0, \therefore x \leq 0;$$

②当  $\frac{1}{3} < x < 2$  时,  $3x-1+2-x=2x+1 \geq 3$ , 解得:  $x \geq 1$ ,  $\therefore 1 \leq x < 2$ ;

③当  $x \geq 2$  时,  $3x-1+x-2=4x-3 \geq 3$ , 解得:  $x \geq \frac{3}{2}$ ,  $\therefore x \geq 2$ ;

综上所述: 不等式  $\left|x - \frac{1}{3}\right| + f(x) \geq 1$  的解集为  $\{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$ . .....5 分

(2) 由  $\left|x - \frac{1}{3}\right| + f(x) \leq x$  知:  $|3x-1| + |x-a| \leq 3x$ ,

$\therefore \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \subseteq M$ ,  $\therefore |3x-1| + |x-a| \leq 3x$  在  $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$  上恒成立,

$\therefore 3x-1 + |x-a| \leq 3x$ , 即  $|x-a| \leq 1$ ,  $\therefore -1 \leq x-a \leq 1$ , 解得:  $a-1 \leq x \leq a+1$ ,

$\therefore \begin{cases} a-1 \leq \frac{1}{3} \\ a+1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ , 解得:  $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{4}{3}$ , 即实数  $a$  的取值范围为  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$ . .....10 分