

成都七中高 2023 届三诊模拟考试数学（理科参考答案）

一. 选择题

1—5: DABDA 6—10: CDDBC 11—12: BA

12. 解: 设 $f(x) = \frac{g(x)}{x + \frac{1}{x}}$, 则 $f'(x) = \frac{g'(x)\left(x + \frac{1}{x}\right) - g(x)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $m = \tan \theta$, 所以 $m \in (0, 1)$,

$n = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in (1, \sqrt{2})$, 则 $f(m) > f(1) > f(n)$,

由 $f(m) > f(1)$ 得 $\frac{g(m)}{m + \frac{1}{m}} > \frac{g(1)}{2}$, 但 $g(a)$ 的符号不确定, 则①不正确;

由 $\frac{g(m)}{m + \frac{1}{m}} > \frac{g(1)}{2}$ 得: $\frac{2m}{m^2 + 1} g(m) > g(1)$, 即 $\frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} g(m) > g(1) \Rightarrow \sin 2\theta \cdot g(m) > g(1)$

$\Rightarrow g(1) - (n^2 - 1)g(m) < 0$, 所以②不正确;

由 $f(1) > f(n) \Rightarrow \frac{g(1)}{2} > \frac{g(n)}{n + \frac{1}{n}} \Rightarrow (n^2 + 1)g(1) > 2ng(n) \Rightarrow (n^2 + 1)g(1) - 2ng(n) > 0$

即 $(\sin 2\theta + 2)g(1) - 2ng(n) > 0$, 所以③正确;

由 $f(m) > f(n) \Rightarrow \frac{mg(m)}{1 + m^2} > \frac{ng(n)}{1 + n^2} \Rightarrow \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} g(m) > \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 + \sin 2\theta} g(n)$

$\Rightarrow \sin 2\theta \cdot g(m) > \frac{2(\sin \theta + \cos \theta)}{2 + \sin 2\theta} g(n) \Rightarrow (2 \sin 2\theta + \sin^2 2\theta)g(m) - (2 \sin \theta + 2 \cos \theta)g(n) > 0$

对于④ $(n^4 - 1)g(m) - 2ng(n) < 0 \Leftrightarrow (2 \sin 2\theta + \sin^2 2\theta)g(m) - (2 \sin \theta + 2 \cos \theta)g(n) < 0$ 矛盾;

所以④不正确;

二. 填空题

13. $-\sqrt{2}$ 14. 10 15. n^2 16. 108

三. 解答题

17. 解: (1) $\because \theta = \frac{\pi}{3}$, 此时 $\angle PAB = \frac{2\pi}{3}$, 由余弦定理可知

$PB^2 = 8 - 8 \cos \frac{2\pi}{3} = 12 \therefore PB = 2\sqrt{3}$ 5 分

(2) $\triangle PAC$ 中, $\angle PCA = \pi - 2\theta$, 由正弦定理可知, $\frac{PA}{\sin(\pi - 2\theta)} = \frac{PC}{\sin \theta} = \frac{2}{\sin \theta}$

$\therefore PA = \frac{2 \sin(\pi - 2\theta)}{\sin \theta} = 4 \cos \theta$, $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} PA \cdot AB \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$ 8 分

$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} 4 \cos \theta \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = 4 \cos \theta \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \sin 2\theta + \sqrt{3} \cos 2\theta + \sqrt{3}$

即 $S_{\triangle PAB} = 2 \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}$ ，当且仅当 $\theta = \frac{\pi}{12}$ 时面积取得最大值.

$\therefore \triangle PAB$ 面积的取值范围为 $(0, 2 + \sqrt{3}]$12 分

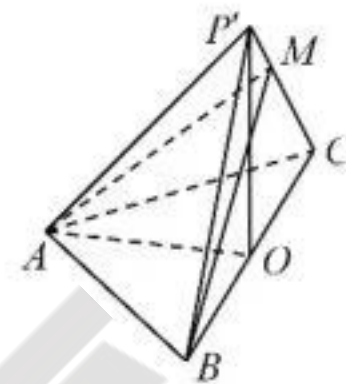
注：也可由 P 在以 C 为圆心，2 为半径的圆上运动考虑.

18. 解：(1) 取 BC 中点 O ，连接 AO ， $P'O$.

因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形， O 为 BC 的中点，则 $AO \perp BC$ ，又 $BC \perp P'A$ ，

$AO \cap AP' = A$ ， $AO, AP' \subset$ 平面 $AP'O$ ，

$\therefore BC \perp$ 平面 $AP'O$ ，所以平面 $AP'O$ 即为平面 α5 分



(2) 由 (1) 可知，因为 $P'O \perp$ 平面 ABC ， $AO \perp BC$ ，以点 O 为坐标原点， OA, OB, OP' 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，

则 $A(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $B(0, 1, 0)$ ， $P'(0, 0, \sqrt{3})$ ， $M\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 7 分

$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{AP'} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$ ，设平面 $P'AB$ 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

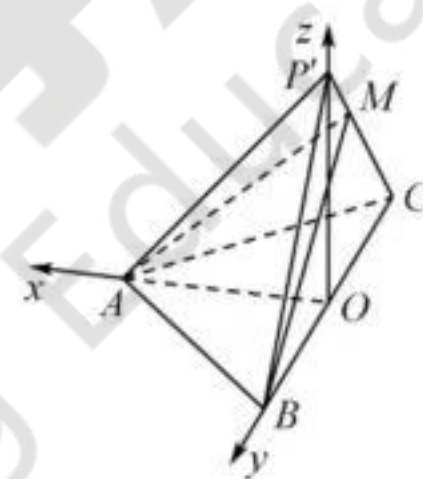
$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = -\sqrt{3}x_1 + y_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AP'} = -\sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}, \text{取 } x_1 = 1, \text{ 则 } \vec{m} = (1, \sqrt{3}, 1),$$

$\overrightarrow{BM} = \left(0, -\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ，设平面 ABM 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -\sqrt{3}x_2 + y_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = -\frac{4}{3}y_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}z_2 = 0 \end{cases}, \text{取 } x_2 = 1, \text{ 则 } \vec{n} = (1, \sqrt{3}, 2),$$

$$\text{由已知可得 } |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{5} \times \sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

综上，二面角 $P'-AB-M$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$12 分



19. 解：(1) 因为前两个矩形的面积之和为 $(0.01 + 0.03) \times 10 = 0.4 < 0.5$ ，前三个矩形面积为 $(0.01 + 0.03 + 0.04) \times 10 = 0.8 > 0.5$ ，

所以中位数在 $(80, 90)$ 之间，设中位数为 x ，

则 $10 \times (0.01 + 0.03) + (x - 80) \times 0.04 = 0.5$ ，解得 $x = 82.5$ ，故中位数为 82.5.3 分

(2) 由题意可得，成绩在 $[90, 100]$ 上的概率为 0.2，则不在 $[90, 100]$ 的概率为 0.8，

所以 $X \sim B(10, 0.2)$ ，即有 $P(X = k) = C_{10}^k (0.2)^k \cdot (0.8)^{10-k}$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ ，

当 $P(X = k)$ 取最大值时，则 $\begin{cases} P(X = k) \geq P(X = k+1) \\ P(X = k) \geq P(X = k-1) \end{cases}$ ，

$$\text{即} \begin{cases} C_{10}^k (0.2)^k \cdot (0.8)^{10-k} \geq C_{10}^{k+1} (0.2)^{k+1} (0.8)^{9-k} \\ C_{10}^k (0.2)^k \cdot (0.8)^{10-k} \geq C_{10}^{k-1} (0.2)^{k-1} (0.8)^{11-k} \end{cases},$$

解得 $(10+1) \times 0.2 - 1 \leq k \leq (10+1) \times 0.2$ ，即 $1.2 \leq k \leq 2.2$ ，

且 $k \in \mathbf{N}$ ，所以 $k = 2$7 分

(3) 由题意可知, 从6道题中选4题共有 $C_6^4 = 15$,
 因为甲能答对6道题中的4道题, 故甲能进复赛的情况共有 $C_4^3 C_2^1 + C_4^4 = 9$,
 所以甲能进复赛的概率为 $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, 则甲不能进复赛的概率为 $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$,
 因为乙能答对6道题中的3道题, 故乙能进复赛的情况共有 $C_3^3 C_3^1 = 3$,
 所以乙能进复赛的概率为 $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, 则乙不能进复赛的概率为 $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$,
 依题可得, ξ 的可能取值为 0, 1, 2,
 所以 $P(\xi=0) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$, $P(\xi=1) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{14}{25}$, $P(\xi=2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$,
 则 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2
P	$\frac{8}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{3}{25}$

则 ξ 的数学期望为 $E(\xi) = 0 \times \frac{8}{25} + 1 \times \frac{14}{25} + 2 \times \frac{3}{25} = \frac{4}{5}$ 12 分

20. 解: (1) 由题椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $|PF_1| + |PF_2| = 4$, 可得 $a = 2$,

又因为点 $P(1, -\frac{3}{2})$ 在椭圆 C_1 上, 解得 $\frac{1}{4} + \frac{9}{4b^2} = 1$, 解得 $b^2 = 3$,

所以椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_P, y_P)$.

因为直线 PA, PB 的倾斜角互补, 且 A, B 是不同的点, 所以直线 PA, PB 都必须有斜率,

设直线 PA 方程为 $y = k(x-1) - \frac{3}{2}$,

联立 $\begin{cases} y = k(x-1) - \frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 整理得 $(3+4k^2)x^2 - (8k^2+12k)x + 4k^2+12k-3=0$,

A 和 P 点横坐标即为方程两个根, 当 $\Delta > 0$ 时, 可得

$x_A + x_P = \frac{8k^2+12k}{3+4k^2}$, 因为 $x_P = 1$, 所以 $x_A = \frac{4k^2+12k-3}{3+4k^2}$,

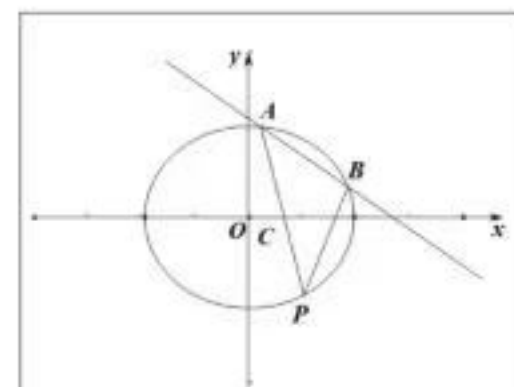
代入直线 PA 可得 $y_A = \frac{12k^2-12k-9}{6+8k^2}$,

即 $A(\frac{4k^2+12k-3}{3+4k^2}, \frac{12k^2-12k-9}{6+8k^2})$, 又因为直线 PA, PB 的倾斜角

互补, 将 k 换成 $-k$,

可得 $B(\frac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}, \frac{12k^2+12k-9}{6+8k^2})$,

两点求斜率可得出 $k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{2}$, 所以直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$ 9 分



∴ 可设直线 AB 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + n$, 设 $M(x_0, y_0)$.

又因为直线 AB 与 x, y 轴正半轴相交, 则 $n > 0$,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + n \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{整理得 } x^2 - nx + n^2 - 3 = 0, \Delta = n^2 - (4n^2 - 12) > 0, \text{解得 } 0 < n < 2.$$

由韦达定理可知, $x_1 + x_2 = n$. 由题意可知 M 为线段 AB 中点, 则 $x_0 = \frac{n}{2}$.

代入直线 $y = -\frac{1}{2}x + n$, 可得 $y_0 = \frac{3}{4}n$.

所以点 M 的轨迹方程为 $3x - 2y = 0 (0 < x < 1)$. 12 分

注: 也可用点差法.

21. 解: (1) $f'(x) = -\sin x + ax$, 且 $f'(0) = 0$. 令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = -\cos x + a$.

① 当 $a \geq 1$ 时, $g'(x) \geq 0$, 则 $g(x)$ 单调递增.

当 $x > 0$ 时, $g(x) = f'(x) > g(0) = 0$; 当 $x < 0$ 时, $g(x) = f'(x) < g(0) = 0$.

即当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递增; 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 单调递减; 即证 0 是函数 $f(x)$ 唯一的极小值点.

② 当 $a < 1$ 时, $g'(0) = -1 + a < 0$,

∴ 存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in (0, \delta)$ 时, $g(x) = f'(x)$ 在 $(0, \delta)$ 单调递减, 即当 $x \in (0, \delta)$ 时, $f'(x) < f'(0) = 0$, ∴ $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 单调递减, 与 0 是函数 $f(x)$ 的极小值点矛盾.

综上 $a \geq 1$, 从而 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$. 6 分

(2) 由 (1) 的证明可知, 当 $a = 1$ 且 $x > 0$ 时, $-\sin x + x > 0$ 即 $x > 0, x > \sin x$.

当 $x > 0$ 时, $\sin^3 x < 1 \cdot x^2$, 即 $\sqrt{\sin^3 x} < x$.
故可得

$$\sqrt{\sin^3 \frac{1}{2}} + \sqrt{\sin^3 \frac{2}{4}} + \sqrt{\sin^3 \frac{3}{8}} + \dots + \sqrt{\sin^3 \frac{2023}{2^{2023}}} < \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{2023}{2^{2023}}.$$

$$\text{令 } S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{2023}{2^{2023}},$$

$$\text{则 } \frac{1}{2}S = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \dots + \frac{2023}{2^{2024}},$$

$$\text{两式相减得 } \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2023}} - \frac{2023}{2^{2024}}, \text{化简可得 } S = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2023} - \frac{2023}{2^{2024}} \right) < 2.$$

$$\text{故 } \sqrt{\sin^3 \frac{1}{2}} + \sqrt{\sin^3 \frac{2}{4}} + \sqrt{\sin^3 \frac{3}{8}} + \dots + \sqrt{\sin^3 \frac{2023}{2^{2023}}} < 2. \quad \text{12 分}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{2\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ y = \frac{\sqrt{2}\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} x = \frac{1}{\cos 2\alpha} \text{ ①,} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \tan 2\alpha \text{ ②,} \end{cases}$$

22. 解: (1) 因为

$$\textcircled{1}^2 - 2 \times \textcircled{2}^2 \text{ 得 } x^2 - 2y^2 = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = 1.$$

$$\text{由 } \theta = \frac{\pi}{6}, \text{ 得 } \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta,$$

$$\text{所以 } \rho \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \rho \cos \theta, \text{ 所以 } y = \frac{\sqrt{3}}{3} x.$$

$$\text{所以 } C \text{ 的普通方程为 } x^2 - 2y^2 = 1, l \text{ 的直角坐标方程为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3} x. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 联立 } \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} x \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases},$$

所以 l 与 C 交点的直角坐标分别为 $(\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1)$,

设点 $(\sqrt{3}, 1)$ 的极坐标为 $(\rho_1, \theta_1), \rho_1 \geq 0, \theta_1 \in [0, 2\pi)$,

$$\text{则 } \rho_1 = \sqrt{3+1} = 2, \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta_1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \rho_1 = 2, \theta_1 = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以点 } (\sqrt{3}, 1) \text{ 的极坐标为 } \left(2, \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{同理可得点 } (-\sqrt{3}, -1) \text{ 的极坐标为 } \left(2, \frac{7\pi}{6}\right),$$

$$\text{故 } l \text{ 与 } C \text{ 交点的极坐标为 } \left(2, \frac{\pi}{6}\right), \left(2, \frac{7\pi}{6}\right). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(注：由教材选修4-4的P11旁侧备注可知，一般情况只要取 $\rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$ 即可.)

23. 解：(1) 当 $a=2$ 时，原不等式可化为 $|3x-1|+|x-2| \geq 3$.

$$\textcircled{1} \text{ 当 } x \leq \frac{1}{3} \text{ 时, } 1-3x+2-x=3-4x \geq 3, \text{ 解得: } x \leq 0, \therefore x \leq 0;$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \frac{1}{3} < x < 2 \text{ 时, } 3x-1+2-x=2x+1 \geq 3, \text{ 解得: } x \geq 1, \therefore 1 \leq x < 2;$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } x \geq 2 \text{ 时, } 3x-1+x-2=4x-3 \geq 3, \text{ 解得: } x \geq \frac{3}{2}, \therefore x \geq 2;$$

$$\text{综上所述: 不等式 } \left|x - \frac{1}{3}\right| + f(x) \geq 1 \text{ 的解集为 } \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1\}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 } \left|x - \frac{1}{3}\right| + f(x) \leq x \text{ 知: } |3x-1|+|x-a| \leq 3x,$$

$$\because \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \subseteq M, \therefore |3x-1|+|x-a| \leq 3x \text{ 在 } \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \text{ 上恒成立,}$$

$$\therefore 3x-1+|x-a| \leq 3x, \text{ 即 } |x-a| \leq 1, \therefore -1 \leq x-a \leq 1, \text{ 解得: } a-1 \leq x \leq a+1,$$

$$\therefore \begin{cases} a-1 \leq \frac{1}{3} \\ a+1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 解得: } -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{4}{3}, \text{ 即实数 } a \text{ 的取值范围为 } \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$