

遂宁市高中 2023 届三诊考试

数学（文科）试题参考答案及评分意见

一、选择题（12×5=60 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	D	C	B	A	C	B	B	C	A	D	B

二、填空题（4×5=20 分）

13. -7 14. $\frac{1}{2}$ 15. $\frac{7\sqrt{7}}{6}\pi$ 16. $\sqrt{2}$

三、解答题

17.（12 分）

（1）根据列联表代入计算可得：

$$K^2 = \frac{100 \times (40 \times 30 - 20 \times 10)^2}{60 \times 40 \times 50 \times 50} = \frac{50}{3} \approx 16.667 > 6.635, \dots\dots\dots$$

5 分

所以有 99% 的把握认为学生得“党史学习之星”与年级有关. $\dots\dots\dots$ 6 分

（2）由题意可知，所抽取的 6 名学生高一年级有 4 人，记为 A_1, A_2, A_3, A_4 ,

高二年级有 2 人，设为甲、乙. $\dots\dots\dots$ 7 分

从这 6 人中随机抽取 2 人的所有基本事件有 $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, A_4\}, \{A_1, \text{甲}\}, \{A_1, \text{乙}\}, \{A_2, A_3\}, \{A_2, A_4\}, \{A_2, \text{甲}\}, \{A_2, \text{乙}\}, \{A_3, A_4\}, \{A_3, \text{甲}\}, \{A_3, \text{乙}\}, \{A_4, \text{甲}\}, \{A_4, \text{乙}\}, \{\text{甲}, \text{乙}\}$, 共 15 个, $\dots\dots\dots$ 9 分

其中至少有一人是高二年级基本事件有 $\{A_1, \text{甲}\}, \{A_2, \text{甲}\}, \{A_3, \text{甲}\}, \{A_4, \text{甲}\}, \{\text{甲}, \text{乙}\}, \{A_1, \text{乙}\}, \{A_2, \text{乙}\}, \{A_3, \text{乙}\}, \{A_4, \text{乙}\}$, 共 9 个. $\dots\dots\dots$ 11 分

故至少有一人是高二年级的概率 $P = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. $\dots\dots\dots$ 12 分

分

18. (12 分)

解：(1) 在 $\triangle ABC$ 中因为 $b\cos A + a\cos B = 2c\cos A$.

由正弦定理得 $\sin B \cos A + \sin A \cos B = 2 \sin C \cos A$,

所以

$$\sin(A+B) = 2 \sin C \cos A \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

因为 $A+B+C = \pi$, 所以 $\sin(A+B) = \sin C$. 故有

$$\sin C = 2 \sin C \cos A \cdots 4 \text{ 分}$$

又 C 是 $\triangle ABC$ 的内角, 所以 $\sin C \neq 0$. 从而 $\cos A = \frac{1}{2}$.

而 A 为 $\triangle ABC$ 的内角, 所以

$$A = \frac{\pi}{3} \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

(2) 因为 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{DC}$ 所以 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$ 所以

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \cdots 8 \text{ 分}$$

从而

$$9 = \frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{9}{16}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow 9 = \frac{1}{16}c^2 + \frac{9}{16}b^2 + \frac{3}{16}bc \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

由基本不等式可得： $9 \geq \frac{3}{8}bc + \frac{3}{16}bc = \frac{9}{16}bc$, 当且仅当

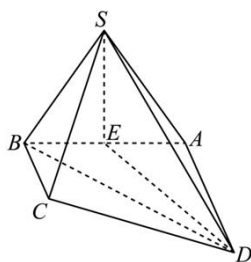
$$b = \frac{4\sqrt{3}}{3}, c = 4\sqrt{3} \text{ 时等号成立}$$

故 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为

$$\frac{1}{2} \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

19. (12 分)

(1) 取 AB 得中点 E , 连接 SE, DE , 如图所示:



因为 $\angle DAB = \angle ABC = 2\angle ABD = 90^\circ$ ，所以 $AB = AD$ ，因为 $\triangle SAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，所以 $AB = AD = 2$ 。在 $\triangle SDE$ 中，
 $SE = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ， $SD = 2\sqrt{2}$ ， $DE = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，因为
 $SE^2 + DE^2 = SD^2$ ，所以 $SE \perp DE$ ，……………2 分

因为 $\triangle SAB$ 是等边三角形， E 为线段 AB 的中点，所以 $SE \perp AB$ ，
 又因为 $AB \cap DE = E$ ， $AB, DE \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $SE \perp$ 平面 $ABCD$ ，……………4 分

$AD \subset$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore SE \perp AD$ ，

$AD \perp AB, SE \cap AB = E$ ， $\therefore AD \perp$ 平面 SAB ，又 $\because SB \subset$ 平面 SAB ，
 $\therefore$ 直线 $AD \perp SB$ ……………6 分

(2) 由 (1) 知 $SE \perp$ 平面 $ABCD$ ，所以 SE 为四棱锥 $S-ABCD$ 的高，

$$\text{又 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1,$$

$$\text{故三棱锥 } S-BCD \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{。} \dots\dots 9 \text{ 分}$$

又因为 $SB = 2$ ， $SD = BD = 2\sqrt{2}$

$$\therefore S_{\triangle BDS} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

$$\therefore V_{C-SBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BDS} \cdot h = \frac{1}{3} \times \sqrt{7} \times h = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore h = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

……………12 分

20. (12 分)

解：(1) 由已知 $|F_1F_2| = 4$ 得 $c = 2$ ，……………1 分

$$\text{又 } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 4 \times b = 4, \quad b = 2, \quad \therefore$$

$$a = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \text{。} \dots\dots 3 \text{ 分}$$

所以椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由 (1) 知 F_1 的坐标为 $(-2, 0)$,

① 当直线 l 的斜率不存在时, $|AB| = 2\sqrt{2}$, $|OQ|^2 = 8$, 则

$$\frac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2} = 1 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

② 当直线 l 的斜率存在且不为 0 时, 设直线 l 的方程为 $y = k(x+2)$ 且 $k \neq 0$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x+2) \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (2k^2+1)x^2 + 8k^2x + 8k^2 - 8 = 0,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{-8k^2}{2k^2+1},$$

$$x_1x_2 = \frac{8k^2-8}{2k^2+1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(\frac{8k^2}{2k^2+1}\right)^2 - 4 \times \frac{8k^2-8}{2k^2+1}} = \frac{4\sqrt{2}(k^2+1)}{2k^2+1}, \dots\dots\dots 8$$

分

设点 $Q(x_0, y_0)$, 则 $\frac{y_0}{x_0} = -\frac{1}{k}$, 即 $x_0 = -ky_0$, 代入椭圆方程得

$$\frac{(-ky_0)^2}{8} + \frac{y_0^2}{4} = 1,$$

$$\text{解得 } y_0^2 = \frac{8}{k^2+2}, \quad x_0^2 = \frac{8k^2}{k^2+2}, \text{ 所以}$$

$$|OQ|^2 = x_0^2 + y_0^2 = \frac{8(k^2+1)}{k^2+2}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2} = \frac{\frac{16(k^2+1)}{2k^2+1}}{\frac{8(k^2+1)}{k^2+2}} = \frac{2k^2+4}{2k^2+1} = \frac{3}{2k^2+1} + 1, \dots\dots\dots 10$$

分

$$\text{又 } 2k^2+1 > 1, \text{ 所以 } \frac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2} \text{ 的取值范围是 } (1, 4). \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

综上所述, $\frac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2}$ 的取值范围是 $[1, 4)$12 分

21. (12 分)

解: $f'(x) = (x+1)e^x - x - 1 = (x+1)(e^x - 1)$,1 分

由 $f'(x) > 0$ 可得: $x < -1$ 或 $x > 0$; 由 $f'(x) < 0$ 可得 $-1 < x < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递增, 在 $(-1, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, +\infty)$, 单调减区间为

$(-1, 0)$3 分

所以 $f(x)_{\text{极大值}} = f(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$, 在 $x = -1$ 时取极大值5 分

分

(2) $f(x) \geq \ln x + (a-2)x - \frac{1}{2}x^2 + 1$ 恒成立等价于 $x - \ln x + xe^x - ax - 1 \geq 0$ 恒成立.6 分

因为 $x > 0$, 所以 $a \leq \frac{x - \ln x + xe^x - 1}{x}$7 分

令 $g(x) = \frac{x - \ln x + xe^x - 1}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}$.

令 $h(x) = x^2 e^x + \ln x$, 则 $h'(x) = e^x(x^2 + 2x) + \frac{1}{x} > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,8 分

又 $h(1) = e > 0$, $h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^e}{e^2} - 1 = e^{\frac{1}{e}-2} - 1 < 0$,

所以 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0$.

所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0 - \ln x_0 + x_0 e^{x_0} - 1}{x_0} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0 \text{ 可得 } x_0 e^{x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0} = \ln \frac{1}{x_0} \cdot e^{\ln \frac{1}{x_0}},$$

$$\text{而 } y = x e^x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 所以 } x_0 = \ln \frac{1}{x_0}, \text{ 即 } e^{x_0} = \frac{1}{x_0},$$

$$\text{所以 } g(x)_{\min} = \frac{x_0 - \ln x_0 + x_0 e^{x_0} - 1}{x_0} = \frac{x_0 + x_0 + 1 - 1}{x_0} = 2, \text{ 所以}$$

$$a \leq 2 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. (10 分)

$$(1) \text{ 由曲线 } C_1: \begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数, } \theta \in [0, \pi]),$$

$$\text{消去参数 } \theta, \text{ 得 } (x-2)^2 + y^2 = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 (0 \leq y \leq 2) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

因为曲线 C_2 是以 $(1, \frac{\pi}{2})$ 为圆心的圆, 且过极点 O , 所以圆心为

$(0, 1)$, 半径为 1,

$$\text{故 } C_2 \text{ 的直角坐标方程为: } x^2 + (y-1)^2 = 1,$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 2y = 0, \text{ 将 } \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \text{ 代入可得: 圆 } C_2 \text{ 的极坐标方程为}$$

$$\rho = 2\sin\theta \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 因为曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4 (0 \leq y \leq 2)$. 即

$$x^2 + y^2 - 4x = 0,$$

$$\text{将 } \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \text{ 代入化简可得 } C_1 \text{ 的极坐标方程为: } \rho = 4\cos\theta$$

$$(\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]),$$

所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$; C_2 的极坐标方程为

$$\rho = 2 \sin \theta;$$

因为 M、N 是直线 $l: \theta = \frac{\pi}{4} (\rho \in \mathbb{R})$ 与曲线 C_1 、 C_2 的两个交点,

不妨设 $M\left(\rho_1, \frac{\pi}{4}\right), N\left(\rho_2, \frac{\pi}{4}\right)$, 由 (1) 得 $C_1: \rho = 4 \cos \theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$,

$$C_2: \rho = 2 \sin \theta,$$

所以 $\rho_1 = 4 \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}, \rho_2 = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, 从而

$$|MN| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{2}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. (10 分)

$$(1) \text{ 解: 当 } t=1 \text{ 时, } f(x) = |x-1| + |x+1| = \begin{cases} 2x(x \geq 1) \\ 2(-1 \leq x < 1) \\ -2x(x < -1) \end{cases}$$

$$\text{Q } f(x) \leq 8 - x^2$$

$$\text{当 } x \geq 1 \text{ 时, 即 } \begin{cases} 2x \leq 8 - x^2 \\ x \geq 1 \end{cases}, \therefore 1 \leq x \leq 2;$$

$$\text{当 } -1 \leq x < 1 \text{ 时, 即 } \begin{cases} 2 \leq 8 - x^2 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases}, \therefore -1 \leq x < 1;$$

$$\text{当 } x < -1 \text{ 时, 即 } \begin{cases} -2x \leq 8 - x^2 \\ x < -1 \end{cases}, \therefore -2 \leq x < -1,$$

综上可得不等式的解集为

$$[-2, 2] \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 解: } \text{Q } f(x) = |x-t| + |x+t| \geq |(x-t) - (x+t)| = 2|t|, \text{ 当且仅当}$$

$$(x-t)(x+t) \leq 0 \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore f(x)_{\min} = 2|t|, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

又 $m > 0$, $n > 0$ 且 $m + n = 4$,

$$\therefore \frac{4m^2 + n}{mn} = \frac{4m}{n} + \frac{1}{m} = \frac{4m}{n} + \frac{m+n}{4m} \geq \frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{4m}{n} \cdot \frac{n}{4m}} = \frac{9}{4}$$

当且仅当 $\frac{4m}{n} = \frac{n}{4m}$, 即 $m = \frac{4}{5}$, $n = \frac{16}{5}$ 时等号成立,

所以

$$\frac{4m^2 + n}{mn} \in \left[\frac{9}{4}, +\infty \right) \dots\dots\dots 8$$

分

根据题意可得 $\frac{9}{4} \leq 2|t|$, 解得 $t \geq \frac{9}{8}$ 或 $t \leq -\frac{9}{8}$,

$\therefore t$ 的取值范围是

$$\left(-\infty, -\frac{9}{8} \right] \cup \left[\frac{9}{8}, +\infty \right) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$