

遂宁市高中 2023 届三诊考试

数学（理科）试题参考答案及评分意见

一、选择题（12×5=60 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	D	C	B	A	C	B	A	D	C	D	A

二、填空题（4×5=20 分）

13. -7 14. $\frac{1}{2}$ 15. 41π 16. 1

三、解答题

17. （12 分）

解：（1）在 $\triangle ABC$ 中因为 $b\cos A + a\cos B = 2c\cos A$.

由正弦定理得 $\sin B \cos A + \sin A \cos B = 2 \sin C \cos A$,

所以 $\sin(A+B) = 2 \sin C \cos A \cdots \cdots 2$

分

因为 $A+B+C=\pi$ ，所以 $\sin(A+B) = \sin C$. 故

$\sin C = 2 \sin C \cos A \cdots 4$ 分

又 C 是 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $\sin C \neq 0$. 从而 $\cos A = \frac{1}{2}$.

而 A 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以

$A = \frac{\pi}{3} \cdots \cdots 6$ 分

（2）因为 $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{DC}$ 所以 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$ 所以

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \cdots 8$ 分

从

而

$9 = \frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{9}{16}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow 9 = \frac{1}{16}c^2 + \frac{9}{16}b^2 + \frac{3}{16}bc \cdots \cdots 10$ 分

由基本不等式可得： $9 \geq \frac{3}{8}bc + \frac{3}{16}bc = \frac{9}{16}bc$ ，当且仅当

$$b = \frac{4\sqrt{3}}{3}, c = 4\sqrt{3} \text{ 时等号成立}$$

故 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为

$$\frac{1}{2} \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. (12 分)

(1) 因为学生初试成绩 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 $\mu = 65$ ，

$$\sigma^2 = 15^2,$$

$$\text{则 } \mu + \sigma = 65 + 15 = 80,$$

所

以

$$P(X \geq 80) = P(X \geq \mu + \sigma) = \frac{1}{2} \times (1 - 0.6827) = 0.15865, \dots\dots\dots 3$$

分

所以估计初试成绩不低于 80 分的人数为

$$0.15865 \times 1000 = 158.65 \approx 159 \text{ 人} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(3) Y 的取值分别为 0, 10, 20, 30, $\dots\dots\dots 6$ 分

$$\text{则 } P(Y=0) = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$P(Y=10) = \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times C_2^1 \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{25}, \dots\dots\dots$$

$\dots\dots 8$ 分

$$P(Y=20) = \frac{3}{4} \times C_2^1 \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{20}, \dots\dots\dots$$

9 分

$$P(Y=30) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{27}{100}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

故 Y 的分布列为：

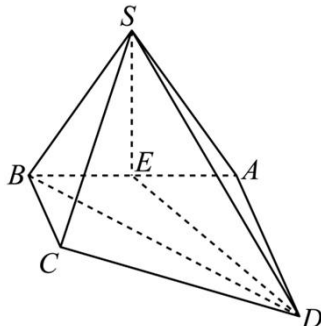
Y	0	10	20	25
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{27}{100}$

所 以 数 学 期 望 为

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{25} + 10 \times \frac{6}{25} + 20 \times \frac{9}{20} + 30 \times \frac{27}{100} = 19.5 \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

19 (12 分)

(1) 取 AB 的中点 E ，连接 SE, DE ，如图所示：



因为 $\angle DAB = \angle ABC = 2\angle ABD = 90^\circ$ ，所以 $AB = AD$ ，因为 $\triangle SAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，所以 $AB = AD = 2$ 。

在 $\triangle SDE$ 中， $SE = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ， $SD = 2\sqrt{2}$ ， $DE = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，
因为

$SE^2 + DE^2 = SD^2$ ，所以 $SE \perp DE$ ， $\cdots \cdots 2$ 分

因为 $\triangle SAB$ 是等边三角形， E 为线段 AB 的中点，所以 $SE \perp AB$ ，又因为 $AB \cap DE = E$ ， $AB, DE \subset$ 平面 $ABCD$ ，所以 $SE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\cdots \cdots 4$ 分

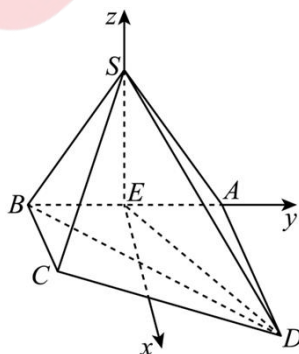
$AD \subset$ 平面 $ABCD$ ， $\therefore SE \perp AD$ ，

又

$AD \perp AB$ ， $SE \cap AB = E$ ， $\therefore AD \perp$ 平面 SAB ，又 $\because SB \subset$ 平面 SAB ，

$\therefore$ 直线 $AD \perp SB$ $\cdots \cdots 6$ 分

(2) 以 E 为原点， EA, ES 分别为 y, z 轴，平行 AD 的直线为 x 轴，建立空间直角坐标系，



则 $E(0,0,0), S(0,0,\sqrt{3}), D(2,1,0), A(0,1,0), C(1,-1,0)$,

$\overrightarrow{SA} = (0,1,-\sqrt{3}), \overrightarrow{SD} = (2,1,-\sqrt{3}), \overrightarrow{SC} = (1,-1,-\sqrt{3})$, 设

$\vec{n} = (x,y,z)$ 为平面 SCD 的法向量, 则 $\begin{cases} 2x+y-\sqrt{3}z=0 \\ x-y-\sqrt{3}z=0 \end{cases}$, 取平面

SCD 的一个法向量为 $\vec{n} = (2,-1,\sqrt{3})$,9 分

取 平 面 SAB 法 向 量

$\vec{m} = (1,0,0)$,10 分

平面 SAB 与平面 SCD 所成的角为 α , 则

$$\cos \alpha = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \left| \frac{2}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以平面 SAB 与平面 SCD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$12 分

分

20 (12 分)

解 : (1) 由 题 设 l_{AG} 方程为 $bx+ax-ab=0$ 因 为

l_{AG} 与 圆 $x^2 + y^2 = \frac{8}{3}$ 相 切 ,

$$\text{所以: } d^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{8}{3}, \text{2 分}$$

$$\text{Q } \frac{a}{c} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a^2 = 8, b^2 = 4,$$

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 5 分

(2) 由 (1) 知 F_1 的坐标为 $(-2,0)$,

① 当直线 l 的斜率不存在时, $|AB| = 2\sqrt{2}$, $|OQ|^2 = 8$, 则

$$\frac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2} = 1; \text{6 分}$$

② 当直线 l 的斜率存在且不为 0 时, 设直线 l 的方程为 $y = k(x+2)$

且 $k \neq 0$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x+2) \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{得} (2k^2+1)x^2 + 8k^2x + 8k^2 - 8 = 0,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{-8k^2}{2k^2+1},$$

$$x_1 x_2 = \frac{8k^2-8}{2k^2+1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{\left(\frac{8k^2}{2k^2+1}\right)^2 - 4 \times \frac{8k^2-8}{2k^2+1}} = \frac{4\sqrt{2}(k^2+1)}{2k^2+1}, \dots\dots\dots$$

8 分

设点 $Q(x_0, y_0)$, 则 $\frac{y_0}{x_0} = -\frac{1}{k}$, 即 $x_0 = -ky_0$, 代入椭圆方程得

$$\frac{(-ky_0)^2}{8} + \frac{y_0^2}{4} = 1,$$

$$\text{解得 } y_0^2 = \frac{8}{k^2+2}, x_0^2 = \frac{8k^2}{k^2+2}, \text{ 所以}$$

$$|OQ|^2 = x_0^2 + y_0^2 = \frac{8(k^2+1)}{k^2+2}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

所以

$$\frac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2} = \frac{\frac{16(k^2+1)}{2k^2+1}}{\frac{8(k^2+1)}{k^2+2}} = \frac{2k^2+4}{2k^2+1} = \frac{3}{2k^2+1} + 1, \dots\dots\dots$$

10 分

又 $2k^2+1 > 1$, 所以 $\frac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2}$ 的取值范围是

$(1, 4)$. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

综上所述, $\frac{2\sqrt{2}|AB|}{|OQ|^2}$ 的取值范围是

$[1, 4)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. (12 分)

解：(1) 因为 $f(x) = me^x - 2x$ ，所以

$$f'(x) = me^x - 2 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

当 $m \leq 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递

减； $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

当 $m > 0$ 时，令 $f'(x) > 0$ ，得 $x > \ln \frac{2}{m}$ ，令 $f'(x) < 0$ ，得 $x < \ln \frac{2}{m}$

综上所述，当 $m \leq 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减；

当 $m > 0$ 时， $f(x)$ 在 $(\ln \frac{2}{m}, +\infty)$ 上单调递增， $f(x)$ 在，
 $(-\infty, \ln \frac{2}{m})$ 上单调递减. 5 分

(2) 因为 $f(x) = me^x - 2x$, $g(x) = \cos x + \frac{3}{2}x^2$,

$$\text{所以 } h(x) = me^x - 2x - \cos x - \frac{3}{2}x^2$$

则

$$h'(x) = me^x - 2 + \sin x - 3x \dots\dots\dots$$

$\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

令 $F(x) = h'(x) = me^x - 2 + \sin x - 3x$ ，则

$$F'(x) = me^x + \cos x - 3..$$

①当 $m \leq 0$ 时， $F'(x) < 0$ ，则 $h'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减， $h(x)$ 不可
 能存在两个极值点；

②当 $m > 0$ 时，因为函数 $h(x)$ 存在两个不同的极值点，所以

$h'(x) = 0$ 有两个不同的实根，

因为 $h'(x) = e^x(m + \frac{\sin x - 2 - 3x}{e^x})$ ，即 $m + \frac{\sin x - 2 - 3x}{e^x} = 0$ 有两个

不同的实根.

$$\text{令 } G(x) = \frac{\sin x - 2 - 3x}{e^x} + m, \text{ 则 } G'(x) = \frac{\cos x - \sin x + 3x - 1}{e^x},$$

令 $H(x) = \cos x - \sin x + 3x - 1$ ，则 $H'(x) = -\sin x - \cos x + 3 > 0$

所以 $H(x)$ 单调递增.

因为 $H(0) = 0$ ，所以 $G(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $G(x)_{\min} = G(0) = m - 2 \dots\dots\dots 9$ 分

当 $m \geq 2$ 时， $G(x) \geq 0$ ， $G(x) = 0$ 不可能有两个不等实根.

当 $0 < m < 2$ 时， $G(x)_{\min} = G(0) = m - 2 < 0$ ， $G(-\pi) = \frac{-2+3\pi}{e^{-\pi}} + m > 0$

$G(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上连续且单调，所以存在唯一实数 $x_1 \in (-\infty, 0)$ ，使得 $G(x_1) = 0$. 10 分

当 $x > 0$ 时，易证 $e^x > x^2$ ， $F(x) = me^x - 2 + \sin x - 3x > mx^2 - 3x - 3$

取 $x_0 = \frac{3+\sqrt{9+12m}}{2m}$ ，则 $F(x_0) > 0$ ，即 $G(x_0) > 0$

因为 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续且单调

所以存在唯一实数 $x_2 \in (0, +\infty)$ ，使得 $G(x_2) = 0$ ，则

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

所以函数 $h(x)$ 存在两个不同的极值点.

综上实数 m 的取值范围为

$0 < m < 2$. $\dots\dots\dots 12$ 分

22. (10 分)

(1) 由曲线 $C_1: \begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数, $\theta \in [0, \pi]$),

消去参数 θ ，得 $(x-2)^2 + y^2 = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4 \dots\dots\dots 2$

分

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 (0 \leq y \leq 2) \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

因为曲线 C_2 是以 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 为圆心的圆，且过极点 O ，所以圆心为

$(0,1)$ ，半径为 1，

故 C_2 的直角坐标方程为： $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ，

即 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ，将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入可得：圆 C_2 的极坐标方程为

$$\rho = 2 \sin \theta \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

(2) 因为曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4 (0 \leq y \leq 2)$ ，即

$$x^2 + y^2 - 4x = 0,$$

将 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 代入化简可得 C_1 的极坐标方程为： $\rho = 4 \cos \theta$

$$(\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]),$$

所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ； C_2 的极坐标方程为

$$\rho = 2 \sin \theta; \cdots 7 \text{ 分}$$

因为 M 、 N 是直线 $l: \theta = \frac{\pi}{4} (\rho \in \mathbb{R})$ 与曲线 C_1 、 C_2 的两个交点，

不妨设 $M\left(\rho_1, \frac{\pi}{4}\right), N\left(\rho_2, \frac{\pi}{4}\right)$ ，由 (1) 得 $C_1: \rho = 4 \cos \theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ ，

$$C_2: \rho = 2 \sin \theta,$$

所以 $\rho_1 = 4 \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}, \rho_2 = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ ，从而

$$|MN| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{2}, \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

23. (10 分)

$$(1) \text{ 解: 当 } t=1 \text{ 时, } f(x)=|x-1|+|x+1|=\begin{cases} 2x(x\geq 1) \\ 2(-1\leq x<1), \\ -2x(x<-1) \end{cases}$$

$$Q f(x) \leq 8-x^2,$$

$$\text{当 } x \geq 1 \text{ 时, 即 } \begin{cases} 2x \leq 8-x^2 \\ x \geq 1 \end{cases}, \therefore 1 \leq x \leq 2;$$

$$\text{当 } -1 \leq x < 1 \text{ 时, 即 } \begin{cases} 2 \leq 8-x^2 \\ -1 \leq x < 1 \end{cases}, \therefore -1 \leq x < 1;$$

$$\text{当 } x < -1 \text{ 时, 即 } \begin{cases} -2x \leq 8-x^2 \\ x < -1 \end{cases}, \therefore -2 \leq x < -1,$$

综上可得不等式的解集为

$$[-2, 2] \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 解: } Q f(x)=|x-t|+|x+t| \geq |(x-t)-(x+t)|=2|t|, \text{ 当且仅当}$$

$$(x-t)(x+t) \leq 0 \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore f(x)_{\min} = 2|t|, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{又 } m > 0, n > 0 \text{ 且 } m+n=4,$$

$$\therefore \frac{4m^2+n}{mn} = \frac{4m}{n} + \frac{1}{m} = \frac{4m}{n} + \frac{m+n}{4m} \geq \frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{4m}{n} \cdot \frac{n}{4m}} = \frac{9}{4}$$

$$\text{当且仅当 } \frac{4m}{n} = \frac{n}{4m}, \text{ 即 } m = \frac{4}{5}, n = \frac{16}{5} \text{ 时等号成立,}$$

所以

$$\frac{4m^2+n}{mn} \in \left[\frac{9}{4}, +\infty \right) \dots\dots\dots 8$$

分

$$\text{根据题意可得 } \frac{9}{4} \leq 2|t|, \text{ 解得 } t \geq \frac{9}{8} \text{ 或 } t \leq -\frac{9}{8},$$

$\therefore t$ 的取值范围是

$$\left(-\infty, -\frac{9}{8}\right] \cup \left[\frac{9}{8}, +\infty\right) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$



锦宏教育
Jinhong Education