

德阳市高中 2020 级“三诊”试题
数学参考答案与评分标准
(文史类)

一、选择题(每小题 5 分,共 60 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	A	D	B	B	D	B	C	A	C

二、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\frac{1}{4}$ 14. 8 15. $3\sqrt{3}$ 16. 2.

三、解答题

17. 解:(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d

$$\because a_2 + a_4 + a_6 = 21 \quad \therefore a_4 = 7$$

$$\text{由 } a_4 = a_2 + 2d \text{ 得: } 7 = 3 + 2d$$

$$\therefore d = 2 \quad \therefore a_1 = 1$$

$$\therefore a_n = 2n - 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } S_n + b_n = 2 \quad \therefore S_{n+1} + b_{n+1} = 2$$

$$\therefore 2b_{n+1} - b_n = 0, \text{ 即 } b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

$$\because b_1 + b_1 = 2 \quad \therefore b_1 = 1$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 为首项是 1, 公比是 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

$$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由题意知 } c_n = 2n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{于是 } T_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = n^2 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解：(1) 由题意可知，绝对学困生有 $(0.25 + 0.50 + 0.75) \times 0.2 \times 100 = 30$ 人

“随特帮助生”共有 $0.25 \times 0.2 \times 100 = 5$ 人

学困指标的平均值为： $(0.25 \times 0.1 + 0.5 \times 0.8 + 0.75 \times 0.5 + 2 \times 0.7 + 1.5 \times 0.9) \times 0.2 = 0.66$ 5 分

(2) 学困指标在 $[0, 0.4)$ 内的学困生共有

$(0.25 + 0.50) \times 0.2 \times 100 = 15$ 人 7 分

依题意得指标在 $[0, 0.2)$ 中抽取了 2 人，分别设为 A, B ；指标在 $[0.2, 0.4)$ 中抽取了 4 人，分别设为 C, D, E, F .

从中选 2 人，所有可能结果如下： $AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF$ 共 15 种不同结果；其中恰从指标在 $[0, 0.2)$ 和 $[0.2, 0.4)$ 各选一人的结果有 8 个不同结果.

故所求概率为 $P = \frac{8}{15}$ 12 分

19. $\triangle PDA$ 沿 PD 翻折中不会改变二面角 $C - BA' - P$ 的大小，其大小为 90° .

(1) 证明： $\because PD \parallel BC, \angle B = 90^\circ \therefore A'P \perp PD$

$\therefore A'P \perp BC$

$\because CB \perp PB, A'P \cap PB = P$

$\therefore CB \perp$ 平面 $A'PB$

$\because CB \subset$ 平面 $A'CB$

$\therefore$ 平面 $A'CB \perp$ 平面 $A'PB$. 故二面角 $C - BA' - P$ 的大小为定值 90° .

..... 4 分

(2) 解：设 $A'B$ 的中点为 F ，连接 EF, PF .

$\because E$ 为 $A'C$ 的中点 $\therefore EF \parallel BC$ 且 $CB = 2EF$.

$\because PD \parallel BC$ 且 $CB = 2PD \therefore EF \parallel PD$ 且 $PD = EF$

$\therefore$ 四边形 $PDEF$ 为平行四边形.

$\therefore ED \parallel PF$

面 $PF \subset$ 平面 $A'PB, ED \not\subset$ 平面 $A'PB$

$\therefore DE \parallel$ 平面 $A'PB$ 8 分

$\because$ 平面 $PA' \perp$ 平面 $PBCD$, 平面 $PA' \cap$ 平面 $PBCD = PD$, $A'P \perp PD$

$\therefore PA' \perp$ 平面 $PBCD$ 10 分

由题设 $A'P = 2$, 四边形 $PBCD$ 为直角梯形

$$\therefore V_{A'-PBCD} = \frac{1}{3} SA = \frac{1}{3} \times (2+1) \times 2 \times 2 = 2, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 由题设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线斜率均不小于 2.

$$\therefore f'(x) = \ln x + \frac{a}{x} + 1 \geq 2 \text{ 恒成立} \Rightarrow a - x \ln x \text{ 在 } x > 0 \text{ 时恒成立}$$

$$\text{设 } F(x) = a - x \ln x, \text{ 则 } F'(x) = a - \ln x$$

$$\text{由 } F'(x) > 0 \text{ 得 } 0 < x < 1$$

$$\therefore x \in (0, 1) \text{ 时 } F(x) \text{ 单调增, } x \in (1, +\infty) \text{ 时 } F(x) \text{ 单调减}$$

$$\therefore F(x) \text{ 的最大值为 } F(1) = 1 \quad \therefore a \geq 1$$

$$\therefore a \leq 1 \quad \therefore a = 1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) h(x) = f(x) - g(x) = (x+1)\ln x - \frac{x^2}{e^x}$$

$$\text{当 } x \in (0, 1] \text{ 时, } h(x) < 0$$

$$\text{又 } h(2) = 3\ln 2 - \frac{4}{e^2} = \ln 8 - \frac{4}{e^2} > 1 - 1 = 0$$

$$\therefore \text{存在 } x_0 \in (1, 2), \text{ 使 } h(x_0) = 0. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 + \frac{x(x-2)}{e^x}$$

$$\text{当 } x \in (1, 2) \text{ 时, } 0 < x(2-x) = -(x-1)^2 + 1 < 1$$

$$e^x > e \quad \therefore 0 < \frac{1}{e^x} < \frac{1}{e} \quad \therefore \frac{x(2-x)}{e^x} < \frac{1}{e}$$

$$\therefore h'(x) > 1 - \frac{1}{e} > 0$$

$$\therefore \text{当 } x \in (1, 2) \text{ 时, } h(x) \text{ 单调递增}$$

$$\therefore \text{函数 } h(x) = f(x) - g(x) \text{ 在 } (1, 2) \text{ 内存在唯一的零点.} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{解: (1) 由 } e = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 得: } a = 2b, c = \sqrt{3}b$$

所以 $F_1(-\sqrt{3}b, 0), F_2(\sqrt{3}b, 0), P(2b, 0)$

$$\text{则 } \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-\sqrt{3}b - 2b, 0) \cdot (\sqrt{3}b - 2b, 0) = b^2$$

由题意 $b^2 = 1$.

故所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $M(x_1, -y_1)$

$$\text{由 } \begin{cases} x = ky - 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } (k^2 + 4)y^2 - 2ky - 3 = 0, \Delta = 16k^2 + 48 > 0$$

$$\text{故 } y_1 + y_2 = \frac{2k}{k^2 + 4}, y_1 \cdot y_2 = \frac{-3}{k^2 + 4}.$$

经过点 $M(x_1, -y_1), B(x_2, y_2)$ 的直线方程为 $\frac{y + y_1}{y_2 + y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ 8分

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } x = \frac{x_2 - x_1}{y_1 + y_2} y_1 + x_1 = \frac{(x_2 - x_1)y_1 + (y_1 + y_2)x_1}{y_1 + y_2} = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{y_1 + y_2}$$

$$\text{又 } x_1 = ky_1 - 1, x_2 = ky_2 - 1$$

$$\text{所以 } x = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{y_1 + y_2} = \frac{(ky_2 - 1)y_1 + (ky_1 - 1)y_2}{y_1 + y_2} \dots\dots\dots 10分$$

$$= \frac{2ky_1 y_2 - (y_1 + y_2)}{y_1 + y_2} = \frac{\frac{-6k}{k^2 + 4} - \frac{2k}{k^2 + 4}}{\frac{2k}{k^2 + 4}} = -4.$$

故直线 MB 与 x 轴交于定点 $(-4, 0)$ 12分

22. 解: (1) 由 $\rho = 2\sqrt{5} \sin \theta$, 得 $x^2 + y^2 - 2\sqrt{5}y = 0$

$$\text{即 } x^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 5. \dots\dots\dots 3分$$

$$(2) \text{ 将 } l \text{ 的参数方程 } \begin{cases} x = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \text{ 代入圆 } C \text{ 的直角坐标方程}$$

$$\text{得 } \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 = 5, \text{ 即 } t^2 - 3\sqrt{2}t + 4 = 0.$$

由于 $\Delta = (3\sqrt{2})^2 - 4 \times 4 = 2 > 0$, 故可设 t_1, t_2 是上述方程的两实根

$$\text{所以 } \begin{cases} t_1 + t_2 = 3\sqrt{2} \\ t_1 \cdot t_2 = 4. \end{cases}$$

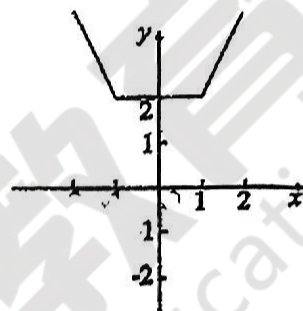
又直线 l 过点 $P(3, \sqrt{5})$

故由上式及 t 的几何意义得: $|PA| \cdot |PB| = |t_1| \cdot |t_2| = |t_1 t_2| = 4. \dots$

..... 10 分

23. 解: (1) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$$



作出函数 $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$ 的图象.

由图象可知, 不等式的解集为

$$\left\{x \mid x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{3}{2}\right\}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 若 $a = 1, f(x) = 2|x - 1|$, 不满足题设条件;

$$\begin{cases} -2x + a + 1, & x \leq a \\ 2x - (a + 1), & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{若 } a < 1, f(x) = \begin{cases} 1 - a, & a < x < 1 \\ 2x - (a + 1), & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2x - (a + 1), x \geq 1$$

$f(x)$ 的最小值为 $1 - a$.

$\therefore$ 对于 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2$ 的充要条件是 $1 - a \geq 2 \quad \therefore a \leq -1$

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, -1]$ 10 分