

## 德阳市高中 2020 级“三诊”考试

## 数学试卷(理工农医类)

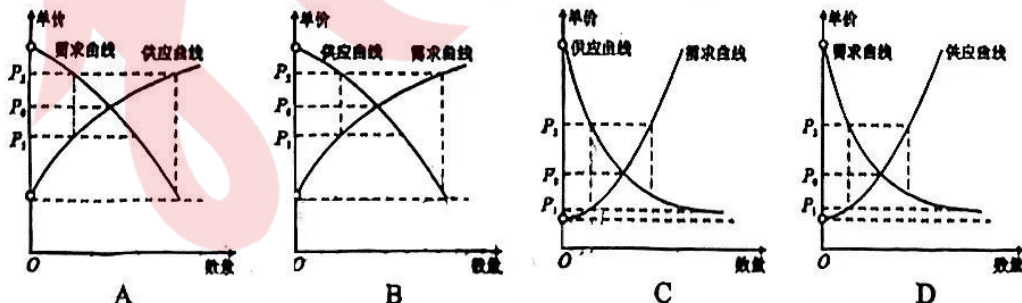
说明：

1. 本试卷分第 I 卷和第 II 卷，共 4 页。考生作答时，须将答案答在答题卡上，在本试卷、草稿纸上答题无效。考试结束后，将答题卡交回。
2. 本试卷满分 150 分，120 分钟完卷。

## 第 I 卷(选择题 共 60 分)

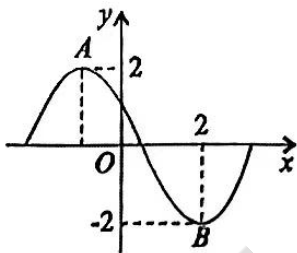
一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内，复数  $\frac{2}{1-i}$  ( $i$  为虚数单位) 所对应的点位于
  - A. 第一象限
  - B. 第二象限
  - C. 第三象限
  - D. 第四象限
2. 已知集合  $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 + x - 6 > 0\}$ , 则  $A \cap B =$ 
  - A.  $\emptyset$
  - B.  $(-\infty, -3) \cup [-2, +\infty)$
  - C.  $[-2, 2)$
  - D.  $(2, 3]$
3. 已知互相垂直的平面  $\alpha, \beta$  交于直线  $l$ . 若直线  $m, n$  满足  $m \parallel \alpha, n \perp \beta$ , 则
  - A.  $m \parallel l$
  - B.  $m \parallel n$
  - C.  $n \perp l$
  - D.  $m$
4. 已知  $p: 0 \leq a \leq 2, q: \text{任意 } x \in \mathbb{R}, ax^2 - ax + 1 \geq 0$ , 则  $p$  是  $q$  成立的
  - A. 充分不必要条件
  - B. 必要不充分条件
  - C. 充要条件
  - D. 既不充分也不必要条件
5. 经济学家在研究供求关系时，一般用纵轴来表示产品价格(自变量)，而用横轴来表示产品数量(因变量)。某类产品的市场供求关系在不受外界因素(如政府限制最高价格等)的影响下，市场会自发调节供求关系：当产品价格  $P_1$  低于均衡价格  $P_0$  时，需求量大于供应量，价格会上升为  $P_2$ ；当产品价格  $P_2$  高于均衡价格  $P_0$  时，供应量大于需求量，价格又下降，价格如此波动下去，产品价格将会逐渐靠近均衡价格  $P_0$ 。能正确表示上述供求关系的图形是



6. 已知矩形  $ABCD$  的面积为 8，当矩形  $ABCD$  周长最小时，沿对角线  $AC$  把  $\triangle ACD$  折起，则三棱锥  $D-ABC$  的外接球表面积等于

- A.  $8\pi$                       B.  $16\pi$                       C.  $48\sqrt{2}\pi$                       D. 不确定的实数
7. 函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$ ) 的部分图象如图所示, 其中 A, B 两点之间的距离为 5, 则  $f(x)$  的单调递增区间是
- A.  $[6k-1, 6k+2](k \in \mathbb{Z})$   
 B.  $[6k-4, 6k-1](k \in \mathbb{Z})$   
 C.  $[3k-1, 3k+2](k \in \mathbb{Z})$   
 D.  $[3k-4, 3k-1](k \in \mathbb{Z})$
8. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 1 \geq 0, \\ x \leq 3, \end{cases}$  则  $z = 2x + 3y$  的最大值是
- A. -3                      B. 6                      C. -7                      D. 12
9. 已知  $D$  为正三角形  $ABC$  中边  $BC$  的中点,  $E$  在线段  $AC$  上且  $AE = \frac{1}{2}EC$ , 若  $AD$  与  $BE$  交于  $M$ , 若  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -27$ , 则正三角形  $ABC$  的边长为
- A. 6                      B. 12                      C. 18                      D. 24
10. 唐代诗人李颀的诗《古从军行》开头两句是“白日登山望烽火, 黄昏饮马傍交河”. 诗中隐含着—个有趣的数学问题——“将军饮马”问题, 即将军在观望烽火之后从山脚下某处出发, 先到河边饮马后再回军营, 怎样走才能使总路程最短? 在平面直角坐标系中, 设军营所在区域为  $x^2 + y^2 \leq 1$ , 若将军从点  $P(-1, -2)$  处出发, 河岸线对应的直线方程为  $x + y = 2$ , 并假定将军只要到达军营所在区域即回到军营, 则“将军饮马”问题中的最短总路程为
- A. 6                      B. 5                      C. 4                      D. 3
11. 已知实数  $x, y$  满足  $e^y \ln x = ye^x, y > 1$ , 则  $x, y$  的大小关系为
- A.  $y > x$                       B.  $y < x$                       C.  $y \geq x$                       D.  $y \leq x$
12. 已知  $F_1, F_2$  为椭圆与双曲线的公共焦点,  $P$  是其一个公共点,  $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ , 则椭圆与双曲线离心率之积的最小值为
- A.  $2\sqrt{3}$                       B. 1                      C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       D. 2



## 第 II 卷(非选择题 共 90 分)

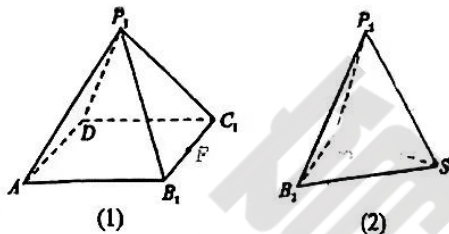
本卷包括必考题和选考题两部分, 第 13 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 将答案填在答题卡上.

13. 已知  $(1-ax)^n(1+3x)^n$  的展开式中  $x$  的系数为 2, 则实数  $a$  的值为 \_\_\_\_\_.
14. 设抛物线  $x^2 = 12y$  的焦点为  $F$ , 经过点  $P(2, 1)$  的直线  $l$  与抛物线相交于 A, B 两点, 又知点  $P$  恰为 AB 的中点, 则  $|AF| + |BF| =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知  $\triangle ABC$  的外接圆  $O$  的半径为 1,  $C = \frac{\pi}{3}$ . 从圆  $O$  内随机取一点  $M$ , 若点  $M$  在  $\triangle ABC$  内的概率恰为  $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ , 则  $\triangle ABC$  的周长为 \_\_\_\_\_.

16. 如图所示, 一个正四棱锥  $P_1-AB_1C_1D$  和一个正三棱锥  $P_2-B_1C_2S$  所有棱长都相等,  $F$  为棱  $B_1C_1$  的中点, 将  $P_1$  和  $P_2$ ,  $B_1$  和  $B_2$ ,  $C_1$  和  $C_2$  分别对应重合为  $P, B, C$  得到一个组合体. 关于该组合体有如下三个结论: ①  $AD \perp SP$ ; ② 直线  $AD$  与直线  $SF$  所成角为  $60^\circ$ ; ③  $AB \parallel SP$ . 其中正确结论的个数是 \_\_\_\_\_.



三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

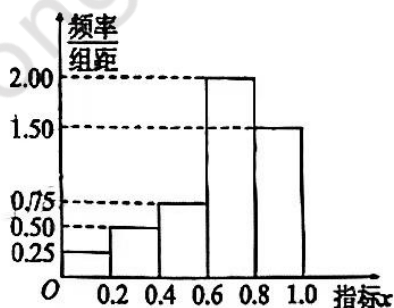
17. (本题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 且满足  $a_2 = 3, a_2 + a_4 + a_6 = 21$ . 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和是  $S_n$ , 且  $S_n + b_n = 2$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  及数列  $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 若  $c_n = a_n + b_n$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (本题满分 12 分)

某学校高二年级某学科的教师决定帮助本年级 100 名对该科学习困难的学生. 为了做到精准帮助, 教师对这 100 名学生的学习兴趣、学习态度、学习习惯等进行调查, 并把调查结果转化为各学生的学困指标  $x$ , 将指标  $x$  分成  $[0, 0.2), [0.2, 0.4), [0.4, 0.6), [0.6, 0.8), [0.8, 1.0]$  五组, 得到如图所示的频率分布直方图. 规定若

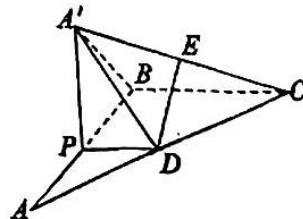


$0 \leq x < 0.6$ , 则认定该生为“绝对学困生”, 否则认定该生为“相对学困生”; 当  $0 \leq x < 0.2$  时, 认定该生为“亟待帮助生”.

- (1) 分别求出“绝对学困生”, “亟待帮助生”的人数; 并求学困指标的平均值.
- (2) 在学困指标处于  $[0, 0.4)$  内的学困生中, 随机选取两名, 用  $X$  表示所选两名学生中“亟待帮助生”的人数, 求  $X$  的分布列和数学期望  $E(X)$ .

19. (本题满分 12 分)

如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $P$  为  $AB$  边上一点,  $PD \parallel BC$  交  $AC$  于点  $D$ , 现将  $\triangle PDA$  沿  $PD$  翻折至  $\triangle PDA'$ .



(1)  $\triangle PDA$  沿  $PD$  翻折中是否会改变二面角  $C-BA'-P$  的大小, 并说明理由;

(2) 若  $PB=CB=2PD=2$ ,  $E$  是  $A'C$  的中点. 求证:  $DE \parallel$  平面  $A'PB$ . 并求当平面  $PDA' \perp$  平面  $PBCD$  时二面角  $E-BD-C$  的余弦值.

20. (本题满分 12 分)

已知椭圆:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $F_1, F_2$  分别是其左、右焦点, 若  $P$  是椭圆上的右顶点, 且  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 1$ .

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线  $x = ky - 1$  与椭圆交于  $A, B$  两点, 点  $A$  关于  $x$  轴的对称点为  $M$  ( $M$  与  $B$  不重合), 问直线  $MB$  与  $x$  轴是否交于一个定点? 若是, 请写出该定点的坐标, 并证明你的结论; 若不是, 请说明理由.

21. (本题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = (x+a)\ln x (a \leq 1)$ ,  $g(x) = x^2 e^{-x}$ , 且曲线  $y = f(x)$  在点  $(x, f(x))$  处的切线斜率均不小于 2.

(1) 求证: 函数  $h(x) = f(x) - g(x)$  在区间  $(1, 2)$  内存在唯一的零点;

(2) 当  $x > 0$  时, 设函数  $m(x)$  为  $f(x)$  与  $g(x)$  中的较小者, 求使  $m(x) \leq k$  恒成立的  $k$  的最小整数值.

请考生在 22、23 二题中任选一题作答. 注意: 只能做所选定的题目. 如果多做, 则按所做第一个题目计分, 作答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (本题满分 10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的方程为  $y = -x + 3 + \sqrt{5}$ . 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 圆  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 2\sqrt{5} \sin \theta$ .

(1) 求圆  $C$  的直角坐标方程;

(2) 设圆  $C$  与直线  $l$  交于点  $A, B$ . 若点  $P$  的坐标为  $(3, \sqrt{5})$ , 求  $|PA| \cdot |PB|$  的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = |x-1| + |x-a|$ .

(1) 若  $a = -1$ , 解不等式  $f(x) \geq 3$ ;

(2) 当  $a \leq 1$  时, 如果  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 2$ , 求  $a$  的取值范围.