

德阳市高中 2020 级“三诊”试题
数学参考答案与评分标准
(理工农医类)

一、选择题(每小题 5 分,共 60 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	A	D	B	B	D	B	C	A	C

二、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. 2 14. 8 15. $3\sqrt{3}$ 16. 2.

三、解答题

17. 解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d

$$\because a_2 + a_4 + a_8 = 21 \quad \therefore a_4 = 7$$

$$\text{由 } a_4 = a_2 + 2d \text{ 得, } 7 = 3 + 2d$$

$$\therefore d = 2 \quad \therefore a_1 = 1$$

$$\therefore a_n = 2n - 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } S_{n+1} + b_n = 2 \quad \therefore S_{n+1} + b_{n+1} = 2$$

$$\therefore 2b_{n+1} - b_n = 0, \text{ 即 } b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

$$\because b_1 + b_1 = 2 \quad \therefore b_1 = 1$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 为首项是 1, 公比是 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

$$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由题意知 } c_n = 2n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{于是 } T_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = n^2 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解：(1) 由题意可知，绝对学困生有 $(0.25 + 0.50 + 0.75) \times 0.2 \times 100 = 30$ 人

“亟待帮助生”共有 $0.25 \times 0.2 \times 100 = 5$ 人

学困指标的平均值为， $(0.25 \times 0.1 + 0.5 \times 0.3 + 0.75 \times 0.5 + 2 \times 0.7 + 1.5 \times 0.9) \times 0.2 = 0.66$ 5 分

(2) 学困指标在 $[0, 0.4)$ 内的学困生共有 $(0.25 + 0.50) \times 0.2 \times 100 = 15$ 人

依题意得 X 的所有可能取值为 0, 1, 2 7 分

$$P(X=0) = \frac{C_{10}^0}{C_{15}^0} = \frac{3}{7}$$

$$P(X=1) = \frac{C_{10}^1 C_5^1}{C_{15}^2} = \frac{10}{21}$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{2}{21}$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$

故 $E(X) = 0 \times \frac{3}{7} + 1 \times \frac{10}{21} + 2 \times \frac{2}{21} = \frac{2}{3}$ 12 分

19. $\triangle PDA$ 沿 PD 翻折中不会改变二面角 $C-BA'-P$ 的大小，其大小为 90° .

(1) 证明： $\because PD \parallel BC, \angle B = 90^\circ \therefore A'P \perp PD$

$\therefore A'P \perp BC$

$\because CB \perp PB, A'P \cap PB = P$

$\therefore CB \perp$ 平面 $A'PB$

$\because CB \subset$ 平面 $A'CB$

$\therefore$ 平面 $A'CB \perp$ 平面 $A'PB$. 故二面角 $C-BA'-P$ 的大小为定值 90° .

..... 4 分

(2) 解：设 $A'B$ 的中点为 F ，连接 EF, PF .

$\because E$ 为 $A'C$ 的中点 $\therefore EF \parallel BC$ 且 $CB = 2EF$.

$\because PD \parallel BC$ 且 $CB = 2PD \therefore EF \parallel PD$ 且 $PD = EF$

高三级数学（理工农医类）答案第 2 页 （共 6 页）

∴ 四边形 PDEF 为平行四边形.

∴ $ED \parallel PF$

而 $PF \subset$ 平面 $A'PB$, $ED \not\subset$ 平面 $A'PB$

∴ $DE \parallel$ 平面 $A'PB$ 7 分

∵ 平面 $PDA' \perp$ 平面 $PBCD$, 平面 $PDA' \cap$ 平面 $PBCD = PD$, $A'P \perp PD$

∴ $PA' \perp$ 平面 $PBCD$ 8 分

以 PA, PD, PA' 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系 $P-xyz$, 则

$D(0, 1, 0), C(-2, 2, 0), B(-2, 0, 0), A'(0, 0, 2), E(-1, 1, 1)$

∴ 平面 BCD 的一个法向量为 $m = (0, 0, 2)$

∴ $\overrightarrow{DE} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{DB} = (-2, -1, 0)$

∴ 设平面 BDE 的一个法向量为 $n = (x, y, z)$, 则由 $n \perp \overrightarrow{DE}, n \perp \overrightarrow{DB}$

可求得 $n = (1, -2, 1)$.

$$\therefore \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| \cdot |n|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

故二面角 $E-BD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 12 分

20. 解: (1) 由 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 得, $a = 2b, c = \sqrt{3}b$

所以 $F_1(-\sqrt{3}b, 0), F_2(\sqrt{3}b, 0), P(2b, 0)$

则 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-\sqrt{3}b - 2b, 0) \cdot (\sqrt{3}b - 2b, 0) = b^2$

由题意 $b^2 = 1$.

故所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $M(x_1, -y_1)$

$$\begin{cases} x = ky - 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } (k^2 + 4)y^2 - 2ky - 3 = 0, \Delta = 16k^2 + 48 > 0$$

$$\text{故 } y_1 + y_2 = \frac{2k}{k^2 + 4}, y_1 \cdot y_2 = \frac{-3}{k^2 + 4}.$$

经过点 $M(x_1, -y_1), B(x_2, y_2)$ 的直线方程为 $\frac{y+y_1}{y_2+y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 8分

$$\text{令 } y=0, \text{ 则 } x = \frac{x_2-x_1}{y_1+y_2} y_1 + x_1 = \frac{(x_2-x_1)y_1 + (y_1+y_2)x_1}{y_1+y_2} = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{y_1+y_2}$$

$$\text{又 } x_1 = ky_1 - 1, x_2 = ky_2 - 1$$

$$\text{所以 } x = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{y_1 + y_2} = \frac{(ky_2 - 1)y_1 + (ky_1 - 1)y_2}{y_1 + y_2} \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$= \frac{2ky_1 y_2 - (y_1 + y_2)}{y_1 + y_2} = \frac{\frac{-6k}{k^2+4} - \frac{2k}{k^2+4}}{\frac{2k}{k^2+4}} = -4.$$

故直线 MB 与 x 轴交于定点 $(-4, 0)$ 12分

21. 解: (1) 由题意曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线斜率均不小于 2,

$$\therefore f'(x) = \ln x + \frac{a}{x} + 1 \geq 2 \text{ 即 } a \geq x - x \ln x \text{ 在 } x > 0 \text{ 时恒成立}$$

$$\text{设 } F(x) = x - x \ln x, \text{ 则 } F'(x) = -\ln x$$

$$\text{由 } F'(x) > 0 \text{ 得: } 0 < x < 1$$

$$\therefore x \in (0, 1) \text{ 时 } F(x) \text{ 单增, } x \in (1, +\infty) \text{ 时 } F(x) \text{ 单减}$$

$$\therefore F(x) \text{ 的最大值为 } F(1) = 1 \quad \therefore a \geq 1$$

$$\therefore a \leq 1 \quad \therefore a = 1. \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\therefore h(x) = f(x) - g(x) = (x+1)\ln x - \frac{x^2}{e^x}$$

$$\text{当 } x \in (0, 1] \text{ 时, } h(x) < 0$$

$$\text{又 } h(2) = 3\ln 2 - \frac{4}{e^2} = \ln 8 - \frac{4}{e^2} > 1 - 1 = 0$$

$$\therefore \text{存在 } x_0 \in (1, 2), \text{ 使 } h(x_0) = 0. \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\text{因为 } h(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 + \frac{x(x-2)}{e^x}$$

$$\text{当 } x \in (1, 2) \text{ 时, } 0 < x(2-x) = -(x-1)^2 + 1 < 1$$

$$e^x > e \quad \therefore 0 < \frac{1}{e^x} < \frac{1}{e} \quad \therefore \frac{x(2-x)}{e^x} < \frac{1}{e}$$

$$\therefore h'(x) > 1 - \frac{1}{e} > 0$$

$\therefore$ 当 $x \in (1, 2)$ 时, $h(x)$ 单调递增

$\therefore$ 函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $(1, 2)$ 内存在唯一的零点. 5 分

(2) 由(1)知, 方程 $f(x) = g(x)$ 在 $(1, 2)$ 内存在唯一的实根 x_0 , 且 $x \in (0, x_0)$

时, $f(x) < g(x)$

又当 $x \in (x_0, 2)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$

$\therefore$ 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$

$\therefore$ 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f(x) > g(x)$

$$[(x+1)\ln x, x \in (0, x_0)]$$

$$\therefore m(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0, x_0) \\ \frac{x^2}{x-1}, & x \in (x_0, +\infty) \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

① 当 $x \in (0, x_0)$ 时, 若 $x \in (0, 1]$, 则 $m(x) \leq 0$;

若 $x \in (1, x_0]$, 由 $m'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 > 0$

可知 $0 < m(x) \leq m(x_0)$

故当 $x \in (0, x_0]$ 时, $m(x) \leq m(x_0)$ 9 分

② 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, 由 $m'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$ 可得当 $x \in (x_0, 2)$ 时, $m'(x)$

> 0 , $m(x)$ 单调递增; $x \in (2, +\infty)$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减.

可知 $m(x) \leq m(2) = \frac{4}{e^2}$, 且 $m(x_0) < m(2)$.

综上可得, 函数 $m(x)$ 的最大值为 $\frac{4}{e^2}$ 11 分

由 $m(x) \leq k$ 恒成立得 $k \geq \frac{4}{e^2}$

故 k 的最小整数值为 1. 12 分

2. 解: (1) 由 $\rho = 2\sqrt{5}\sin\theta$, 得: $x^2 + y^2 - 2\sqrt{5}y = 0$

即 $x^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 5$ 3 分

(2) 将 l 的参数方程 $\begin{cases} x = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 代入圆 C 的直角坐标方程

得 $(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 = 5$, 即 $t^2 - 3\sqrt{2}t + 4 = 0$.

由于 $\Delta = (3\sqrt{2})^2 - 4 \times 4 = 2 > 0$, 故可设 t_1, t_2 是上述方程的两实根

所以 $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3\sqrt{2} \\ t_1 \cdot t_2 = 4 \end{cases}$

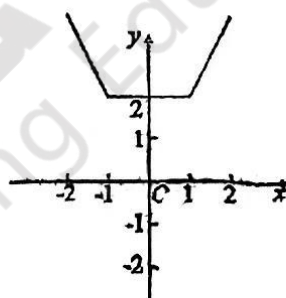
又直线 l 过点 $P(3, \sqrt{5})$

故由上式及 t 的几何意义得: $|PA| \cdot |PB| = |t_1| \cdot |t_2| = |t_1 t_2| = 4$

..... 10 分

23. 解: (1) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = |x-1| + |x+1|$

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$$



作出函数 $f(x) = |x-1| + |x+1|$ 的图象.

由图象可知, 不等式的解集为

$\{x | x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{3}{2}\}$ 5 分

(2) 若 $a = 1$, $f(x) = 2|x-1|$, 不满足题设条件;

$$-2x + a + 1, x \leq a$$

$$\text{若 } a < 1, f(x) = \begin{cases} 1-a, & a < x < 1 \\ 2x - (a+1), & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2x - (a+1), x \geq 1$$

$f(x)$ 的最小值为 $1-a$.

$\therefore$ 对于 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2$ 的充要条件是 $1-a \geq 2 \quad \therefore a \leq -1$

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, -1]$ 10 分