成都树德中学高 2020 级高三下 4 月三诊模拟测试数学试题（理科）

一、单选题（每小题仅有一个正确选项，选对得 5 分，共 60 分）

1．已知集合 $A=\left\{y\left|y=x+\frac{1}{x}\right.\right\}$，$B=\left\{x\in\mathbf{N}\left|\sqrt{x}<2\right.\right\}$，则 $\left(\complement_{\mathrm{R}}A\right)\cap B=$（　　）

A．$\{x|0\le x<2\}$　　B．$\{x|2\le x<4\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{2,3\}$

2．若复数 z 满足 $z+\bar{z}=2$，$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $|z|=$（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

3．如图，一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_9,x_{10}$，的平均数为 5，方差为 s_1^2，去除 x_9，x_{10} 这两个数据后，平均数为 $\bar{x}$，方差为 s_2^2，则（　）

A．$\bar{x}>5$，$s_1^2>s_2^2$　　B．$\bar{x}<5$，$s_1^2<s_2^2$　　C．$\bar{x}=5$，$s_1^2<s_2^2$　　D．$\bar{x}=5$，$s_1^2>s_2^2$

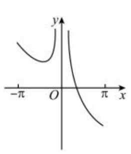
4．已知单位向量 a，b 满足 $a\cdot b=0$，若向量 $c=a+\sqrt{3}b$，则 $\cos\langle a,c\rangle=$（　）

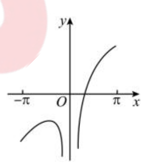
A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D．$\frac{1}{4}$

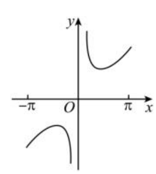
5．世界数学三大猜想："费马猜想"、"四色猜想"、"哥德巴赫猜想"，其中"四色猜想"和"费马猜想"已经分别在 1976 年和 1994 年荣升为"四色定理"和"费马大定理"．281 年过去了，哥德巴赫猜想仍未解决，目前最好的成果"1＋2"由我国数学家陈景润在 1966 年取得．哥德巴赫猜想描述为：任何不小于 4 的偶数，都可以写成两个质数之和．在不超过 17 的质数中，随机选取两个不同的数，其和为奇数的概率为（　　）

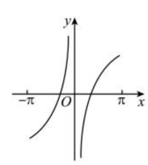
A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{2}{7}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{5}$

6．函数 $f(x)=x-\frac{\sin x}{x^3}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的图像大致为（　）

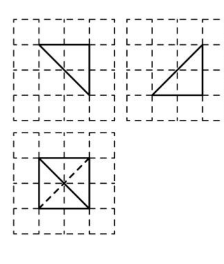
A．

B．

C．

D．

7．如图，网格纸上绘制的是一个几何体的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该几何体的体积为（　　）



A．$\frac{2}{3}$　　B．1　　C．$\frac{4}{3}$　　D．4

8．将函数 $y=\sin\left(2x+\varphi\right)\left(\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 图像上各点横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，再向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位得到曲线 C．若曲线 C 的图像关于 y 轴对称，则 φ 的值为（　）

A．$-\dfrac{\pi}{3}$　　B．$-\dfrac{\pi}{6}$　　C．$-\dfrac{\pi}{12}$　　D．$\dfrac{\pi}{3}$

9．两千多年前，古希腊数学家阿波罗尼斯采用切割圆锥的方法研究圆锥曲线，他用平行于圆锥的轴的平面截取圆锥得到的曲线叫做“超曲线”，即双曲线的一支，已知圆锥 PQ 的轴截面为等边三角形，平面 $\alpha\,/\!/\,PQ$，平面 α 截圆锥侧面所得曲线记为 C，则曲线 C 所在双曲线的离心率为（　）

A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{13}}{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

10．函数 $f\left(x\right)=\cos x-\dfrac{1}{2}ax^2$，定义域为 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$f\left(x\right)$ 有唯一极值点，则实数 a 的取值范围为（　）

A．$\left(-1,-\dfrac{2}{\pi}\right)$　　B．$\left(-1,-\dfrac{1}{2\pi}\right)$　　C．$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2\pi}\right)$　　D．$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{\pi}\right)$

11．已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上，$PB=PC=2\sqrt{5},AB=AC=4$，$PA=BC=2$，则球 O 的表面积为（　）

A．$\dfrac{316}{15}\pi$　　B．$\dfrac{79}{15}\pi$　　C．$\dfrac{158}{5}\pi$　　D．$\dfrac{79}{5}\pi$

12．已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$a_1=2$，$a_2=-1$，$a_{n+2}=\begin{cases}a_{n+1}-a_n(a_{n+1}\quad a_n)\\ a_n-a_{n+1}(a_{n+1}<a_n)\end{cases}$，$b_n=1+(-1)^n$，$S_n$ 是数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_{1000}=$（　）

A．656　　B．660　　C．672　　D．674

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13．若 x，y 满足 $\begin{cases}x-y+1\quad 0\\ x-y\quad 0\\ x-1\quad 0\end{cases}$，则 $2y-x$ 的最小值是 ________．

14．已知 $a=\int_{-1}^{1}xdx$，则 $\left(2x+a-1\right)^5$ 的展开式中 x^3 项的系数为__________．

15．过抛物线 $y^2=8x$ 焦点的直线与抛物线交于 M,N 两点，设抛物线的准线与 x 轴的交点为 A，当 $MA\perp NA$ 时，$|MN|=$_________；

16．已知函数 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 定义域均为 R，且 $f\left(x+1\right)=-\dfrac{1}{2}f\left(x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}g\left(x\right)$，$g\left(x+1\right)=-\dfrac{1}{2}g\left(x\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}f\left(x\right)$，$f\left(x\right)=f\left(5-x\right)$，$g\left(365\right)=-\sqrt{3}$，则 $\sum_{k=1}^{2023}f\left(k\right)=$_______．

三、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

（一）必考题，第 17～21 题为必做题，每个试题考生都必须作答，共 60 分.

17.（12 分）在锐角三角形 ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，CD 为 CA 在 CB 方向上的投影向量，且满足 $2c\sin B=\sqrt{5}\left|CD\right|$.

(1)求 $\cos C$ 的值；

(2)若 $b=\sqrt{3}$，$a=3c\cos B$，求 ABC 的周长.

18．某农科所对冬季大棚内的昼夜温差与某反季节大豆新品种发芽率之间的关系进行分析研究，记录了 2023 年 1 月 1 日至 1 月 12 日大棚内的昼夜温差与每天每 100 颗种子的发芽数，得到如下资料：

日期	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日	6 日	7 日	8 日	9 日	10 日	11 日	12 日
温差 x/°C	10	11	13	12	8	10	9	11	13	10	12	9
发芽数 y/颗	21	24	28	28	15	22	17	22	30	18	27	18
$\sum_{i=1}^{12}x_i=128$；$\sum_{i=1}^{12}y_i=270$；$\sum_{i=1}^{12}x_iy_i=2965$；$\sum_{i=1}^{12}x_i^2=1394$												

已知发芽数 y 与温差 x 之间线性相关，该农科所确定的研究方案是：先从这 12 组数据中选取 2 组，用剩下的 10 组数据求线性回归方程，再用被选取的 2 组数据进行检验.

(1)求选取的 2 组数据恰好是相邻 2 天的数据的概率；

(2)若选取的是 1 日与 6 日的两组数据，试根据除这两日之外的其他数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y=bx+a$；（精确到 1）

(3)若由线性回归方程得到的估计数据与所选取的检验数据的误差均不超过 2 颗，则认为求得的线性回归方程是可靠的，试问：（2）中所得的线性回归方程是否可靠.

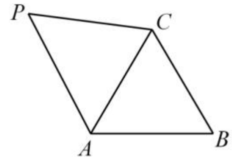
参考公式：回归方程 $y=bx+a$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为

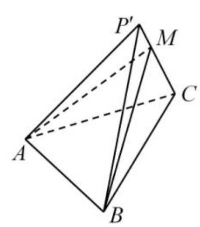
$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}，\quad a=\overline{y}-b\overline{x}.$$

19．如图，在四边形 $ABCP$ 中，△ABC 为边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形，CP＝CA，将△ACP 沿 AC 翻折，使点 P 到达 P' 的位置，若平面 $P'BC\perp$ 平面 ABC，且 $BC\perp P'A$.

（1）求线段 $P'A$ 的长；

（2）设 M 在线段 $P'C$ 上，且满足 $MC=2P'M$，求二面角 $P'-AB-M$ 的余弦值.





20．（12 分）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过点 $P(-1,-1)$ 且与 x 轴平行的直线与椭圆 E 恰有一个公共点，过点 P 且与 y 轴平行的直线被椭圆 E 截得的线段长为 $\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）设过点 P 的动直线与椭圆 E 交于 M,N 两点，T 为 y 轴上的一点，设直线 MT 和 NT 的斜率分别为 k_1 和 k_2，若 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ 为定值，求点 T 的坐标.

21．（12 分）已知函数 $f(x)=\frac{x^2+ax+a}{\mathrm{e}^x}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\leq 2$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3)设 $g(n)=\frac{1}{2\mathrm{e}^n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$g(1)+g(2)+\cdots+g(n)<\frac{3}{4}$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。并用铅笔在答题卡选考题区域内把所选的题号涂黑。如果多做，则按所做的第一题计分。[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．（10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C_1 的方程为 $x^2+y^2=r^2(r>0)$，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{3}{2}\cos\varphi,\\ y=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），已知圆 C_1 与曲线 C_2 相切，以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

（1）求 r 和曲线 C_2 的极坐标方程；

（2）已知在极坐标系中，圆 C_1 与极轴的交点为 D，射线 $\theta=\alpha(0<\alpha<\pi)$ 与曲线 C_1、C_2 分别相交于点 A、B（异于极点），求 ΔABD 面积的最大值.

[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

23．设 a，b，c 均为正数，且 $a+b+c=1$.

（1）求 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b+c}$ 的最小值；

（2）证明：$\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}\ \ \sqrt{6}$.

参考答案

1—6：CCDBBB，7—12CBAAAD

13、1　　14、80　　15、8　　16、2

17、（1）由 CD 为 CA 在 CB 方向上的投影向量，则 $\left|CD\right| = b\cos C$，即 $2c\sin B = \sqrt{5}b\cos C$，

根据正弦定理，$2\sin C\sin B = \sqrt{5}\sin B\cos C$，

在锐角 ABC 中，$B \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin B > 0$，即 $2\sin C = \sqrt{5}\cos C$，

由 $C \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos^2 C + \sin^2 C = 1$，整理可得 $\cos^2 C + \dfrac{5}{4}\cos^2 C = 1$，解得 $\cos C = \dfrac{2}{3}$.

（2）由 $a = 3c\cos B$，根据正弦定理，可得 $\sin A = 3\sin C\cos B$，

在 ABC 中，$A + B + C = \pi$，则 $\sin\left(B + C\right) = 3\sin C\cos B$，$\sin B\cos C + \cos B\sin C = 3\sin C\cos B$，

$\sin B\cos C = 2\sin C\cos B$，

由（1）可知 $\cos C = \dfrac{2}{3}$，$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$，则 $\sin B = \sqrt{5}\cos B$，

由 $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$，则 $5\cos^2 B + \cos^2 B = 1$，解得 $\cos B = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$，$\sin B = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$，

根据正弦定理，可得 $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$，则 $c = \dfrac{\sin C}{\sin B}b = \sqrt{2}$，$a = \dfrac{\sqrt{6}}{2}c = \sqrt{3}$，

故 ABC 的周长 $C_{ABC} = a + b + c = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

18、（1）从12组数据中任选2组，选法数为 C_{12}^2；

选取的2组数据恰好是相邻的2天，选法数为11；所以所求概率为 $P = \dfrac{11}{C_{12}^2} = \dfrac{11}{66} = \dfrac{1}{6}$.

（2）设剩下的10组数据分别为 $\left(u_1, v_1\right), \left(u_2, v_2\right), \quad, \left(u_{10}, v_{10}\right)$.

$$\sum_{i=1}^{10} u_i v_i = \sum_{i=1}^{12} x_i y_i - 10 \times 21 - 10 \times 22 = 2965 - 430 = 2535;$$

$$\bar{u} = \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i - 20\right) = 10.8, \bar{v} = \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{12} y_i - 43\right) = 22.7，\quad 10\bar{u}\bar{v} = 10 \times 10.8 \times 22.7 = 2451.6;$$

$$\sum_{i=1}^{10} u_i^2 = \sum_{i=1}^{12} x_i^2 - 2 \times 10^2 = 1394 - 200 = 1194，\quad 10\bar{u}^2 = 10 \times 10.8^2 = 1166.4;$$

所以$b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}u_iv_i-10\overline{u}\overline{v}}{\sum\limits_{i=1}^{10}u_i^2-n\overline{u}^2}=\dfrac{2535-2451.6}{1194-1166.4}\approx 3.0$. 所以$\hat{a}=\overline{v}-\hat{b}\overline{u}=22.7-3\times 10.8=-9.7\approx -10$.

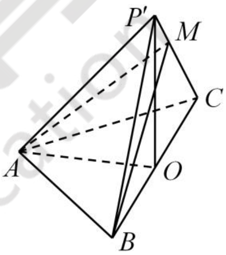
所以所求回归方程为$\hat{y}=3x-10$.

（3）当$x=10$时，$\hat{y}=3\times 10-10=20$.因为$21-20=1<2;22-20=2$，

所以根据所给的研究方案，可以判断（2）中所得的线性回归方程是可靠的.

19、（1）取BC中点O，连接AO，$P'O$，因为$\triangle ABC$为等边三角形，O为BC的中点，则$AO\perp BC$，又$BC\perp P'A$，$AO\cap AP'=A$，AO，$AP'\subset$平面$AP'O$，

$\therefore BC\perp$平面$AP'O$，$\therefore BC\perp OP'$.



所以$BP'=CP'=2\sqrt{3}$，即 $P'BC$为等边三角形，所以$OP'=3$，

又平面$P'BC\perp$平面ABC，$AO\perp BC$，所以$AO\perp$平面$P'BC$，所以$AO\perp P'O$，

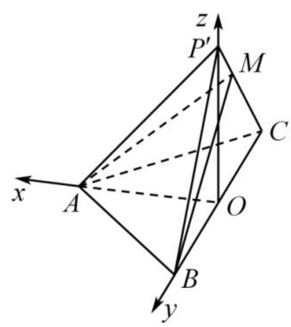
又$AO=3$，所以$AP'=\sqrt{AO^2+P'O^2}=3\sqrt{2}$.

（2）因为$P'O\perp$平面ABC，$AO\perp BC$，以点O为坐标原点，OA、OB、OP'所在直线分别为x、y、z轴建立如下图所示的空间直角坐标系，

则$A(3,0,0)$、$B\left(0,\sqrt{3},0\right)$、$P'(0,0,3)$，$M\left(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},2\right)$

$\overrightarrow{AB}=\left(-3,\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{AP'}=(-3,0,3)$，设平面$P'AB$的法向量为$m=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}m\cdot AB=-3x_1+\sqrt{3}y_1=0\\ m\cdot AP=-3x_1+3z_1=0\end{cases}$，取$x_1=1$，则$m=\left(1,\sqrt{3},1\right)$，



$BM=\left(0,-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},2\right)$，设平面$ABM$的法向量为$n=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}n\cdot AB=-3x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ n\cdot BM=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}y_2+2z_2=0\end{cases}$，取$x_2=1$，则$n=\left(1,\sqrt{3},2\right)$，

由已知可得$\left|\cos\langle m,n\rangle\right|=\dfrac{|m\cdot n|}{|m|\cdot|n|}=\dfrac{6}{\sqrt{5}\times\sqrt{8}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. 综上，二面角$P'-AB-M$的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

20、（1）由题意，椭圆的下顶点为$(0,-1)$，故$b=1$.

由对称性，椭圆过点$\left(-1,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，代入椭圆方程有$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4}=1$，解得：$a=2$.

故椭圆E的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）设点T坐标为$(0,t)$.

当直线MN斜率存在时，设其方程为$y=k(x+1)-1$，与$\frac{x^2}{4}+y^2=1$联立得：

$(4k^2+1)x^2+8k(k-1)x+4k(k-2)=0$.

设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\frac{-8k(k-1)}{4k^2+1},x_1x_2=\frac{4k(k-2)}{4k^2+1}$.

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_1}{y_1-t}+\frac{x_2}{y_2-t}=\frac{x_1}{kx_1+k-1-t}+\frac{x_2}{kx_2+k-1-t},$$

$$=\frac{2kx_1x_2+(k-1-t)(x_1+x_2)}{k^2x_1x_2+k(k-1-t)(x_1+x_2)+(k-1-t)^2},$$

$$=\frac{8k^2(k-2)-8k(k-1)(k-1-t)}{4k^3(k-2)-8k^2(k-1)(k-1-t)+(k-1-t)^2(4k^2+1)}=\frac{8tk^2-8(t+1)k}{(4t^2-3)k^2-2(t+1)k+(t+1)^2}.$$

$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$为定值，即与$k$无关，则$(t+1)^2=0,t=-1$，此时$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=-8$.

经检验，当直线MN斜率不存在时也满足$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=-8$，故点$T$坐标为$(0,-1)$.

21、（1）由题意可知$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，

$$f'(x)=\frac{(2x+a)e^x-(x^2+ax+a)e^x}{(e^x)^2}=\frac{(-x^2-ax+2x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-x(x+a-2)}{e^x}$$

令$f'(x)=0$，则$x_1=0$，$x_2=2-a$

①当$a=2$时，$x_1=x_2=0$，$f'(x)\le0$在$\mathbf{R}$上恒成立，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减.

②当$a>2$时，$x_1>x_2$，$x\in(-\infty,2-a)$时，$f'(x)<0$，

$x\in(2-a,0)$时，$f¢(x)>0$，$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)<0$，

故$f(x)$在$(-\infty,2-a)$单调递减，在$(2-a,0)$单调递增，在$(0,+\infty)$单调递减.

③当$a<2$时，$x_1<x_2$，$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，

$x\in(0,2-a)$时，$f'(x)>0$，$x\in(2-a,+\infty)$时，$f'(x)<0$，

故$f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，在$(0,2-a)$单调递增，在$(2-a,+\infty)$单调递减.

（2）当$x\geq 0$时，$f(x)\leq 2$恒成立，

故$\dfrac{x^2+ax+a}{e^x}\leq 2$，所以$x^2+ax+a\leq 2e^x$，即$a(x+1)\leq 2e^x-x^2$，

由$x+1>0$得$a\leq\dfrac{2e^x-x^2}{x+1}$，令$h(x)=\dfrac{2e^x-x^2}{x+1}$（$x\geq 0$），

则$h'(x)=\dfrac{(2e^x-2x)(x+1)-(2e^x-x^2)}{(x+1)^2}=\dfrac{x(2e^x-x-2)}{(x+1)^2}$，

令$t(x)=2e^x-x-2$，则$t'(x)=2e^x-1$，

$t'(x)$在$[0,+\infty)$单调递增，则$t'(x)\geq t'(0)=1$，

即$t'(x)>0$在$(0,+\infty)$恒成立，故$t(x)$在$[0,+\infty)$单调递增.

所以$t(x)\geq t(0)=0$，故$h'(x)\geq 0$在$[0,+\infty)$恒成立.

由$h(x)$在$[0,+\infty)$单调递增，而$h(0)=2$，$h(x)\geq 2$，故$a\leq 2$.

（3）取$a=2$时，$x^2+2x+2\leq 2e^x$，则$x^2+2x+1\leq 2e^x-1$，

所以$\dfrac{1}{2e^x-1}\leq\dfrac{1}{(x+1)^2}$，因此$\dfrac{1}{2e^n-1}\leq\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

则$g(1)+g(2)+\cdots+g(n)<\dfrac{1}{(1+1)^2}+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{3}{4}$

22、（1）由曲线C_2参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\cos\varphi,\\ y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$为参数）得$x^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{9}{4}$，

因为圆C_1与曲线C_2相切，所以$r=3$，因此，曲线C_2极坐标方程为$\rho=3\sin\theta$.

（2）因为射线$\theta=\alpha(0<\alpha<\pi,\rho>0)$与圆$C_1$、曲线$C_2$分别相交于点$A$、$B$（异于极点），设$A(\rho_A,\alpha)$、$B(\rho_B,\alpha)$，由题意得$\rho_B=3\sin\alpha$，$\rho_A=3$，所以$|AB|=|\rho_A-\rho_B|=3-3\sin\alpha$.

因为点D到直线AB的距离为$d=|OD|\sin\alpha=3\sin\alpha$，

所以$S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}(3-3\sin\alpha)\cdot 3\sin\alpha=\dfrac{9}{2}\sin\alpha(1-\sin\alpha)\quad\dfrac{9}{2}\dfrac{(\sin\alpha+1-\sin\alpha)^2}{4}=\dfrac{9}{8}$，

当且仅当$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$时等号成立，故ΔABD面积的最大值为$\dfrac{9}{8}$.

22、（1）　a，b，c均为正数，且$a+b+c=1$，

$\therefore b+c=1-a>0$，

$\therefore\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b-c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{1-a}=[a+(1-a)](\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{1-a})=5+\dfrac{1-a}{a}+\dfrac{4a}{1-a}\quad 5+2\sqrt{\dfrac{1-a}{2}\cdot\dfrac{4a}{1-a}}=9$，

当且仅当$\dfrac{1-a}{a}=\dfrac{4a}{1-a}$，即$a=\dfrac{1}{3}$时，等号成立，

故$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b+c}$的最小值为 9.

（2）证明：由柯西不等式可得，$[(1-a)+(1-b)+(1-c)](1+1+1)\quad(\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c})^2$，即$(\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c})^2\quad 6$，

故不等式$\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}\quad\sqrt{6}$成立，当且仅当$a=b=c=\dfrac{1}{3}$，等号成立.