成都石室中学2022－2023学年度下期高2023届三诊模拟考试

文科数学

（全卷满分150分，考试时间120分钟）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在本试卷和答题卡相应位置上.

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案. 答案不能答在试卷上.

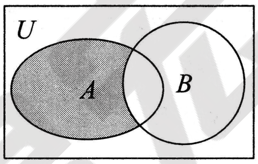
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答. 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答无效.

4. 考生必须保证答题卡的整洁. 考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷（选择题，共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|\log_2 x\leqslant 2\}$，$B=\{x|1<x<5\}$，则图中阴影部分表示的集合为

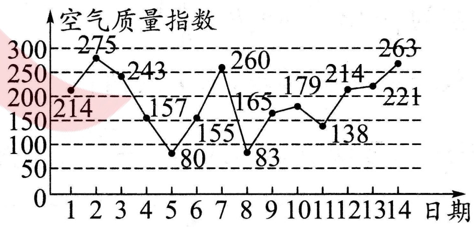


A. $\{x|x\leqslant 5\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant 1\}$　　C. $\{x|x\leqslant 4\}$　　D. $\{x|1<x\leqslant 5\}$

2. 已知i是虚数单位，复数$z-\mathrm{i}=\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则复数$z$的共轭复数为

A. 2　　B. -2　　C. $2\mathrm{i}$　　D. $-2\mathrm{i}$

3. 空气质量指数是评估空气质量状况的一组数据，空气质量指数划分为$[0,50)$，$[50,100)$，$[100,150)$，$[150,200)$，$[200,300)$和$[300,500]$六档，分别对应“优”“良”“轻度污染”“中度污染”“重度污染”和“严重污染”六个等级. 如图是某市3月1日至14日连续14天的空气质量指数趋势图，则下列说法中正确的是



A. 这14天中有5天空气质量为“中度污染”

B. 从2日到5日空气质量越来越好

C. 这14天中空气质量指数的中位数是214

D. 连续三天中空气质量指数方差最小的是5日到7日

4. 已知$f(x)=x^2-ax+a$，则“$a>4$”是“$f(x)$有两个不同的零点”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 m,n 为两条不同的直线，α,β 为两个不同的平面，则下列命题中正确的是

A. $m\subset\alpha,n\subset\alpha,m/\!/\beta,n/\!/\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta$　　B. $\alpha/\!/\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta\Rightarrow m/\!/n$

C. $m\perp\alpha,m\perp n\Rightarrow n/\!/\alpha$　　D. $m/\!/n,n\perp\alpha\Rightarrow m\perp\alpha$

6. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_3=6,S_9=15$，则 $S_{12}=$

A. 16　　B. 18　　C. 20　　D. 22

7. 英国物理学家和数学家牛顿曾提出物体在常温环境下温度变化的冷却模型. 如果物体的初始温度是 θ_1，环境温度是 θ_0，则经过 t min 物体的温度 θ 将满足 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$，其中 k 是一个随着物体与空气的接触情况而定的正常数. 现有90℃的物体，若放在10℃的空气中冷却，经过 10 min 物体的温度为50℃，则若使物体的温度为20℃，需要冷却

A. 17.5 min　　B. 25.5 min　　C. 30 min　　D. 32.5 min

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 O 及点 $A\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则双曲线 C 的方程为

A. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$　　C. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$

9. 若三棱锥 $P-ABC$ 的所有顶点都在同一个球的表面上，其中 $PA\perp$ 平面 ABC，$PA=2\sqrt{2}$，$AB=AC=2$，$\angle BAC=90°$，则该球的体积为

A. 16π　　B. $\frac{16\pi}{3}$　　C. 8π　　D. $\frac{32\pi}{3}$

10. 将函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ 上单调递增，则 ω 的最大值为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$ 为偶函数，$f(x+2)$ 为奇函数，且满足 $f(1)+f(2)=2$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=$

A. -2023　　B. 0　　C. 2　　D. 2023

12. 设 A,B 是抛物线 $C:y^2=4x$ 上两个不同的点，O 为坐标原点，若直线 OA 与 OB 的斜率之积为 -4，则下列结论正确的有

①$|AB|\geqslant4$；②$|OA|+|OB|>8$；③直线 AB 过抛物线 C 的焦点；④$\triangle OAB$ 面积的最小值是 2.

A. ①③④　　B. ①②④　　C. ②③④　　D. ①②③④

第Ⅱ卷(非选择题，共 90 分)

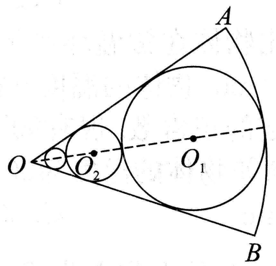
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\boldsymbol{a}=(-2,\lambda)$，$\boldsymbol{b}=(3,1)$，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|=$___▲___.

14. 2023 年成都大运会需招募志愿者，现从甲、乙等 5 名志愿者中任意选出 2 人开展应急救助工作，则甲、乙 2 人中恰有 1 人被选中的概率为___▲___.

15. 已知实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases}x-y+1\geqslant0,\\2x+y\geqslant0,\\x\leqslant m,\end{cases}$ 且 $z=3x-2y$ 的最大值为 $\frac{14}{3}$，则实数 m 的值为___▲___.

16. 如图，已知在扇形 OAB 中，半径 $OA=OB=3$，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，圆 O_1 内切于扇形 OAB（圆 O_1 和 OA，OB，弧 AB 均相切），作圆 O_2 与圆 O_1，OA，OB 相切，再作圆 O_3 与圆 O_2，OA，OB 相切，以此类推. 设圆 O_1，圆 O_2…的面积依次为 S_1，S_2…，那么 $S_1+S_2+\cdots+S_n=$ ▲ .



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答；第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. （本小题满分 12 分）"城市公交"泛指城市范围内定线运营的公共汽车及轨道交通等交通方式，也是人们日常出行的主要方式. 某城市的公交公司为了方便市民出行，科学规划车辆投放，在一个人员密集流动地段增设一个起点站，为了研究车辆发车间隔时间 x 与乘客等候人数 y 之间的关系，经过调查得到如下数据：

间隔时间（x 分钟）	6	8	10	12	14
等候人数（y 人）	15	18	20	24	23

（Ⅰ）根据以上数据作出折线图，易知可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系，请用相关系数加以说明；

（Ⅱ）建立 y 关于 x 的回归直线方程，并预测车辆发车间隔时间为 20 分钟时乘客的等候人数.

附：对于一组数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$；相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$；$3\sqrt{15}\approx 11.62$.

▲

18. （本小题满分 12 分）在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，△ABC 的外接圆的半径为 1，且 $b=a\cos C-\frac{\sqrt{3}}{6}ac$.

（Ⅰ）求 a 的值；

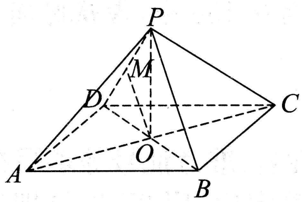
（Ⅱ）若 $b=1$，求△ABC 的面积.

▲

19.（本小题满分 12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为菱形，AC 与 BD 相交于点 O，$PA=PC$，$PB=PD$，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=2$，M 为线段 PD 的中点.

（Ⅰ）求证：平面 $PBD\perp$ 平面 PAC；

（Ⅱ）若直线 OM 与平面 $ABCD$ 所成角为60°，求三棱锥 $O-ABM$ 的体积.



▲

20.（本小题满分 12 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 $F(1,0)$，点 M 是椭圆 C 上异于左、右顶点 A_1，A_2 的任意一点，且直线 MA_1与直线 MA_2的斜率之积为 $-\dfrac{3}{4}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）若直线 A_1M 与直线 $x=a$ 相交于点 N，且点 E 是线段 A_2N 的中点，$\angle EFA_2=\dfrac{\pi}{4}$，求 $\angle EFM$ 的值.

▲

21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=e^x(ax-a+2)$的极小值点为 -2.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$在 $x=0$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x)=mf(x)-x(x+4)$，$\forall x\in[-2,+\infty)$，$g(x)\geqslant 2$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

▲

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，那么按所做的第一题计分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（本小题满分 10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=3+r\cos\beta,\\ y=3+r\sin\beta\end{cases}$（$\beta$ 为参数，$r>0$），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

（Ⅰ）若曲线 C_1 与 C_2 有且仅有一个公共点，求 r 的值；

（Ⅱ）若曲线 C_1 与 C_2 相交于 A，B 两点，且 $|AB|=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$，求直线 AB 的极坐标方程.

▲

23.［选修 4－5：不等式选讲］（本小题满分 10 分）已知函数 $f(x)=|x-1|-|x+1|+x$.

（Ⅰ）解不等式 $f(x)<\dfrac{1}{2}x-1$；

（Ⅱ）是否存在正实数 k，使得对任意的实数 x，都有 $f(x+k)\geqslant f(x)$成立？若存在，求出 k 的取值范围；若不存在，请说明理由.

▲