

成都石室中学 2022-2023 学年度下期高 2023 届三诊模拟考试
文科数学参考答案

双向细目表

题型	题号	具体内容	分值	难度预估
选择题	1	集合运算	5	0.95
选择题	2	复数运算	5	0.9
选择题	3	统计	5	0.95
选择题	4	充要条件、函数零点	5	0.9
选择题	5	空间点线面位置关系	5	0.9
选择题	6	等差数列求和	5	0.9
选择题	7	函数的应用	5	0.8
选择题	8	双曲线的几何性质	5	0.8
选择题	9	三棱锥外接球的体积	5	0.8
选择题	10	三角函数的图象与性质	5	0.7
选择题	11	抽象函数的性质	5	0.5
选择题	12	直线与抛物线的位置关系	5	0.4
填空题	13	向量的坐标运算	5	0.95
填空题	14	概率	5	0.9
填空题	15	线性规划	5	0.7
填空题	16	等比数列求和	5	0.3
解答题	17	线性回归分析	12	0.8
解答题	18	解三角形、三角恒等变换	12	0.8
解答题	19	立体几何、面面垂直、棱锥体积	12	0.75
解答题	20	直线与椭圆的位置关系	12	0.45
解答题	21	函数与导数、不等式恒成立问题	12	0.45
解答题	22/23	选修：坐标系与参数方程/不等式选讲	10	0.75
			150	0.7

答案及解析

1. B 【解析】由图可知，阴影部分表示的集合为 $(\complement_U B) \cap A$. 因为全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | \log_2 x \leq 2\} = \{x | 0 < x \leq 4\}$, $B = \{x | 1 < x < 5\}$, 所以 $\complement_U B = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 5\}$, 则 $(\complement_U B) \cap A = \{x | 0 < x \leq 1\}$.
2. A 【解析】 $z - i = \frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$, 故 $z = 2$, 所以 $\bar{z} = 2$.
3. B 【解析】对于 A, 这 14 天中有 4 天空气质量指数在 $[150, 200)$ 内, 则有 4 天为“中度污染”, 故 A 错误; 对于 B, 从 2 日到 5 日空气质量逐渐下降, 即空气质量越来越好, 故 B 正确; 对于 C, 将 14 天的数据从小到大排列为 80, 83, 138, 155, 157, 165, 179, 214, 214, 221, 243, 260, 263, 275, 其中位数为 $\frac{1}{2} \times (179 + 214) = 196.5$, 故 C 错误; 对于 D, 5 日到 7 日这三天的数据相差比较大, 则连续三天中空气质量指数方差最小的不是 5 日到 7 日, 故 D 错误.

4. A 【解析】若 $f(x)$ 有两个不同的零点, 则 $\Delta = (-a)^2 - 4a > 0$, 解得 $a > 4$ 或 $a < 0$, 所以“ $a > 4$ ”是“ $f(x)$ 有两个不同的零点”的充分不必要条件.

5. D 【解析】 m, n 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面. 对于 A, $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta \Rightarrow \alpha$ 与 β 平行或相交, 故 A 错误; 对于 B, $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta \Rightarrow m$ 与 n 平行或异面, 故 B 错误; 对于 C, $m \perp \alpha, m \perp n \Rightarrow n \parallel \alpha$ 或 $n \subset \alpha$, 故 C 错误; 对于 D, $m \parallel n, n \perp \alpha \Rightarrow m \perp \alpha$, 满足直线与平面垂直的性质, 故 D 正确.

6. B 【解析】设该等差数列的公差为 d . 因为 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_3 = 6, S_9 = 15$, 所以

$$\begin{cases} 3a_1 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2d = 6, \\ 9a_1 + \frac{1}{2} \times 9 \times 8d = 15, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a_1 = \frac{19}{9}, \\ d = -\frac{1}{9}, \end{cases} \quad \text{所以 } S_{12} = 12 \times \frac{19}{9} + \frac{1}{2} \times 12 \times 11 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = 18.$$

7. C 【解析】由题意, 得 $50 = 10 + (90 - 10)e^{-10k}$, 即 $e^{-10k} = \frac{1}{2}$, 所以 $k = \frac{1}{10} \ln 2$, 所以 $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)e^{-\frac{t}{10} \ln 2}$. 由 $20 = 10 + (90 - 10)e^{-\frac{t}{10} \ln 2}$, 得 $e^{-\frac{t}{10} \ln 2} = \frac{1}{8}$, 即 $-\frac{t}{10} \ln 2 = \ln \frac{1}{8} = -3 \ln 2$, 解得 $t = 30$, 即若使物体的温度为 20°C , 需要冷却 30 min.

8. C 【解析】由双曲线的方程可得, 渐近线的方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$. 因为点 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在渐近线上, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{3}{2}$, 所以 $a = \sqrt{3}b$. 又点 A 在以 OF 为直径的圆上, 所以 $OA \perp AF$, 所以 $AF^2 + OA^2 = OF^2$, 即 $\left(\frac{3}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = c^2$, 解得 $c = 2$ (负值已舍去). 又 $a^2 + b^2 = c^2, a > 0, b > 0$, 所以 $a = \sqrt{3}, b = 1$, 所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

9. D 【解析】因为 $PA \perp$ 平面 $ABC, \angle BAC = 90^\circ$, 所以可将该三棱锥进行补形, 补成一个长方体, 从而长方体的外接球就是该三棱锥的外接球, 则外接球的直径为 $2R = \sqrt{AP^2 + AB^2 + AC^2} = \sqrt{8 + 4 + 4} = 4$, 得 $R = 2$, 故三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3} \times 2^3 = \frac{32\pi}{3}$.

10. A 【解析】将 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到 $g(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象. 因为 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, 所以 $\frac{\pi}{4} < \omega x - \frac{\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \omega\pi + \frac{\pi}{4}$. 因为 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 所以 $\omega\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, 即 $0 < \omega \leq \frac{1}{4}$, 所以 ω 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

11. B 【解析】因为 $f(x+1)$ 为偶函数, 所以 $f(-x+1) = f(x+1)$, 所以 $f(-x+2) = f(x)$. 因为 $f(x+2)$ 为奇函数, 所以 $f(-x+2) = -f(x+2)$, 所以 $f(x+2) = -f(x)$, 所以 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数. 由 $f(-x+2) = -f(x+2)$, 令 $x=0$, 得 $f(2) = -f(2)$, 则 $f(2) = 0$. 又 $f(1) + f(2) = 2$, 得 $f(1) = 2$. 由 $f(-x+2) = -f(x+2)$, 令 $x=1$, 得 $f(1) = -f(3)$, 则 $f(3) = -2$. 由 $f(x+2) = -f(x)$, 令 $x=2$, 得 $f(4) = -f(2) = 0$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$, 所以 $\sum_{k=1}^{2023} f(k) = [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] \times 505 + f(1) + f(2) + f(3) = 0 \times 505 + 2 + 0 + (-2) = 0$.

12. A 【解析】取 $A(1, -2), B(1, 2)$, 满足 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -4$, 此时 $|OA| + |OB| = 2\sqrt{5}$, 故②错误; 由题意可

知,直线 AB 的斜率不为 0, 设直线 AB 的方程为 $x=my+t$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} x=my+t, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 整

理得 $y^2-4my-4t=0$, 则 $y_1+y_2=4m$, $y_1y_2=-4t$. 因为 $k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_1y_2}{x_1x_2} = \frac{16}{y_1y_2} = -\frac{4}{t} = -4$, 所以

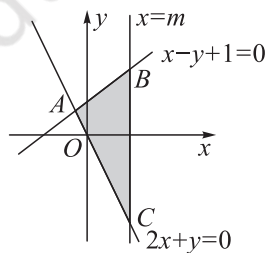
$t=1$, 所以直线 AB 的方程为 $x=my+1$, 则直线 AB 过点 $(1, 0)$. 又因为抛物线 C 的焦点为 $F(1, 0)$, 所以直线 AB 过焦点 F , 故③正确; 由抛物线的性质可知, $|AB| \geq 2p=4$, 故①正确; 由上可得, 直线 AB

的方程为 $x=my+1$, 则 $|AB| = \sqrt{1+m^2} \cdot |y_1-y_2| = 4(m^2+1)$, 原点 O 到直线 AB 的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$, 则 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 4(m^2+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} = 2\sqrt{m^2+1} \geq 2$, 故④正确.

13. $2\sqrt{5}$ 【解析】由 $a=(-2, \lambda)$, $b=(3, 1)$, 得 $a+b=(1, \lambda+1)$. 因为 $(a+b) \perp b$, 所以 $(a+b) \cdot b = (1, \lambda+1) \cdot (3, 1) = 3+1+\lambda=0$, 解得 $\lambda=-4$, 故 $a=(-2, -4)$, 所以 $|a| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = 2\sqrt{5}$.

14. $\frac{3}{5}$ 【解析】记另外 3 人为 a, b, c . 从甲、乙等 5 名志愿者中任意选出 2 人, 总事件包括: (甲, 乙), (甲, a), (甲, b), (甲, c), (乙, a), (乙, b), (乙, c), (a, b), (a, c), (b, c), 共 10 种情况, 其中甲、乙 2 人中恰有 1 人被选中的事件包括: (甲, a), (甲, b), (甲, c), (乙, a), (乙, b), (乙, c), 共 6 种情况, 故所求的概率为 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

15. $\frac{2}{3}$ 【解析】不等式组表示的平面区域如图中的阴影部分所示, 且点 $A(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $B(m, m+1)$, $C(m, -2m)$, $m \geq -\frac{1}{3}$. 由题意, 知 $z=3x-2y$ 在点 C 处取得最大值, 即 $3m-2 \cdot (-2m) = \frac{14}{3}$, 解得 $m = \frac{2}{3}$.

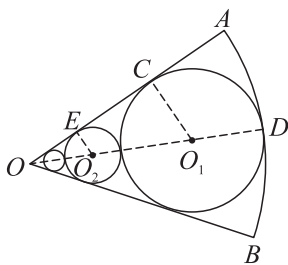


16. $\frac{9\pi}{8}(1-\frac{1}{9^n})$ 【解析】如图, 设圆 O_1 与弧 AB 相切于点 D , 圆 O_1 , 圆 O_2 与 OA

分别切于点 C, E , 则 $O_1C \perp OA$, $O_2E \perp OA$. 设圆 O_1 , 圆 O_2 , 圆 $O_3, \dots$, 圆 O_n 的半径分别为 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. 因为 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle AOD = \frac{\pi}{6}$. 在 $\text{Rt}\triangle OO_1C$ 中, $OO_1 = 3-r_1$, 则 $O_1C = \frac{1}{2}OO_1$, 即 $r_1 = \frac{3-r_1}{2}$, 解得 $r_1 = 1$. 在 $\text{Rt}\triangle OO_2E$ 中, $OO_2 = 3-r_2-2r_1$, 则 $O_2E = \frac{1}{2}OO_2$, 即 $r_2 = \frac{3-r_2-2r_1}{2}$, 解得 $r_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}r_1$. 同理可得, $r_3 = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}r_2$, 所以 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ 是以 $r_1=1$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列. 又

因为圆的面积公式为 $S = \pi r^2$, 所以面积 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ 构成一个以 $\pi r_1^2 = \pi$ 为首项, 以 $\frac{1}{9}$ 为公比的等

比数列, 则 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \frac{\pi[1-(\frac{1}{9})^n]}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9\pi}{8}(1-\frac{1}{9^n})$.



17. 解：(I) 由题意，知 $\bar{x}=10, \bar{y}=20$, 1 分

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (6-10)(15-20) + (8-10)(18-20) + (10-10)(20-20) + (12-10)(24-20) + (14-10)(23-20) = 20 + 4 + 0 + 8 + 12 = 44, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40, \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 25 + 4 + 0 + 16 + 9 = 54, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } r = \frac{44}{\sqrt{40 \times 54}} = \frac{11}{3\sqrt{15}}.$$

又 $3\sqrt{15} \approx 11.62$, 则 $r \approx 0.95$.

因为 y 与 x 的相关系数近似为 0.95, 说明 y 与 x 的线性相关非常高,

所以可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. 7 分

$$(II) \text{ 由 (I) 可得, } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{44}{40} = 1.1,$$

$$\text{则 } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 20 - 1.1 \times 10 = 9,$$

所以 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y} = 1.1x + 9$, 10 分

当 $x = 20$ 时, $\hat{y} = 1.1 \times 20 + 9 = 31$,

所以预测车辆发车间隔时间为 20 分钟时乘客的等候人数为 31 人. 12 分

18. 解：(I) 由已知及正弦定理，得 $\sin B = \sin A \cos C - \frac{\sqrt{3}}{6} a \sin C$ 1 分

$$\text{又 } \sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C, \text{ 即 } \cos A \sin C = -\frac{\sqrt{3}}{6} a \sin C. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \sin C \neq 0, \text{ 所以 } \cos A = -\frac{\sqrt{3}}{6} a.$$

因为 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 1, 所以 $a = 2 \sin A$, 5 分

$$\text{所以 } \cos A = -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2 \sin A, \text{ 得 } \tan A = -\sqrt{3}.$$

$$\text{又 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{2\pi}{3}, \text{ 则 } a = 2 \sin A = \sqrt{3}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理, 得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{2\pi}{3}, \text{ 且 } a = \sqrt{3}, b = 1,$$

所以 $c^2 + c - 2 = 0$, 解得 $c = 1$ 或 $c = -2$ (舍去), 10 分

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (I) 证明：因为四边形 $ABCD$ 为菱形, $AC \cap BD = O$,

所以 O 为 BD 的中点, $AC \perp BD$.

又因为 $PB = PD$, 所以 $PO \perp BD$.

又 $AC \cap PO = O$, 所以 $BD \perp$ 平面 PAC .

又 $BD \subset$ 平面 PBD ,

所以平面 $PBD \perp$ 平面 PAC 5 分

(II) 解: 因为 $PA = PC$, O 为 AC 的中点, 所以 $PO \perp AC$.

又 $PO \perp BD$, $AC \cap BD = O$,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 M 为线段 PD 的中点, O 为 BD 的中点, 所以 $OM \parallel PB$ 7 分

又因为直线 OM 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° ,

所以直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° , 即 $\angle PBO = 60^\circ$.

因为 $\angle BAD = 60^\circ$, $AD = AB = 2$,

所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形,

所以 $OB = 1$, $OA = \sqrt{3}$, 则 $OP = \sqrt{3}$, 9 分

则点 M 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $V_{O-ABM} = V_{M-ABO} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}$,

故三棱锥 $O-ABM$ 的体积为 $\frac{1}{4}$ 12 分

20. 解: (I) 因为点 M 是椭圆 C 上异于左、右顶点 A_1, A_2 的任意一点, 且直线 MA_1 与直线 MA_2 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$,

所以根据椭圆的相关性质可知, $-\frac{b^2}{a^2} = -\frac{3}{4}$ 3 分

又因为 $c = 1$, $a^2 - b^2 = c^2$,

所以 $a = 2$, $b = \sqrt{3}$,

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 5 分

(II) 设直线 A_1M 的方程为 $y = k(x + 2)$, $k \neq 0$.

由 $\begin{cases} y = k(x + 2), \\ x = 2, \end{cases}$ 得 $N(2, 4k)$ 6 分

因为 E 是线段 A_2N 的中点, $A_2(2, 0)$,

所以 $E(2, 2k)$, 不妨设 $k > 0$.

又 $F(1, 0)$, $\angle EFA_2 = \frac{\pi}{4}$,

所以 $\tan \angle EFA_2 = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2k - 0}{2 - 1}$, 解得 $k = \frac{1}{2}$ 8 分

由 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x + 2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 得 $x^2 + x - 2 = 0$,

则 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 所以 $MF \perp FA_2$, 10 分

$$\text{故 } \angle EFM = \angle MFA_2 - \angle EFA_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

由椭圆的对称性可知, 当 $k < 0$ 时, $\angle EFM = \frac{\pi}{4}$.

综上所述, $\angle EFM = \frac{\pi}{4}$ 12 分

21. 解: (I) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = e^x(ax+2)$, 函数 $f(x)$ 的极小值点为 -2 ,

$$\text{所以 } f'(-2) = e^{-2}(-2a+2) = 0, \text{ 解得 } a = 1,$$

$$\text{所以 } f(x) = e^x(x+1), f'(x) = e^x(x+2).$$

当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, -2 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 满足题意.

$$\text{因为 } f'(0) = 2, f(0) = 1, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以函数 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处的切线方程为 } y-1=2(x-0), \text{ 即 } y=2x+1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 因为 $g(x) = me^x(x+1) - x^2 - 4x, \forall x \in [-2, +\infty), g(x) \geq 2$ 恒成立,

$$\text{所以 } g(0) = m \geq 2, g'(x) = me^x(x+1) + me^x - 2x - 4 = (x+2)(me^x - 2). \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } x \geq -2, \text{ 所以由 } g'(x) > 0 \text{ 得 } e^x > \frac{2}{m}, \text{ 即 } x > \ln \frac{2}{m}; \text{ 由 } g'(x) < 0 \text{ 得 } x < \ln \frac{2}{m}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

① 当 $\ln \frac{2}{m} < -2$ 即 $m > 2e^2$ 时, $g(x)$ 在 $[-2, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } g(x)_{\min} = g(-2) = -me^{-2} + 4 = \frac{1}{e^2}(2e^2 - m) + 2 < 2, \text{ 不满足 } g(x)_{\min} \geq 2, \text{ 舍去; } \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

② 当 $\ln \frac{2}{m} = -2$ 即 $m = 2e^2$ 时, $g(x)_{\min} = g(-2) = 2$, 满足 $g(x)_{\min} \geq 2$; 9 分

③ 当 $\ln \frac{2}{m} > -2$ 即 $2 \leq m < 2e^2$ 时, $-2 < \ln \frac{2}{m} \leq 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left[-2, \ln \frac{2}{m}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\ln \frac{2}{m}, +\infty\right)$ 上单调递增, 10 分

$$\text{则 } g(x)_{\min} = g\left(\ln \frac{2}{m}\right) = me^{\ln \frac{2}{m}}\left(\ln \frac{2}{m} + 1\right) - \left(\ln \frac{2}{m}\right)^2 - 4\ln \frac{2}{m} = -\ln \frac{2}{m}\left(2 + \ln \frac{2}{m}\right) + 2 \geq 2, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } m \in [2, 2e^2).$$

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $[2, 2e^2]$ 12 分

22. 解: (I) 由已知可得, 曲线 C_1 的普通方程为 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = r^2$,

所以曲线 C_1 是以 $(3, 3)$ 为圆心, r 为半径的圆. 1 分

$$\text{因为 } \rho = 2\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \rho = 2\sin\theta + 2\cos\theta \Rightarrow \rho^2 = 2\rho\sin\theta + 2\rho\cos\theta,$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 = 2x + 2y \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2,$$

所以曲线 C_2 是以 $(1, 1)$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆. 3 分

若曲线 C_1 与 C_2 有且仅有一个公共点, 则两圆相切,

所以 $\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=r+\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=|r-\sqrt{2}|$.

又 $r>0$, 所以 $r=\sqrt{2}$ 或 $r=3\sqrt{2}$ 5 分

(II) 将两圆的方程相减, 得 $4x+4y+r^2-18=0$,

所以直线 AB 的方程为 $4x+4y+r^2-18=0$ 6 分

因为 $|AB|=\frac{\sqrt{30}}{2}$,

所以圆 C_2 的圆心到直线 AB 的距离为 $d=\sqrt{2-\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{|4+4-18+r^2|}{\sqrt{4^2+4^2}}$,

解得 $r^2=12$ 或 $r^2=8$, 8 分

则直线 AB 的方程为 $2x+2y-3=0$ 或 $2x+2y-5=0$,

故直线 AB 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-3=0$ 或 $2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-5=0$ 10 分

23. 解: (I) $f(x)=|x-1|-|x+1|+x=\begin{cases} x+2, & x<-1, \\ -x, & -1\leq x\leq 1, \\ x-2, & x>1. \end{cases}$ 1 分

① 当 $x<-1$ 时, $f(x)<\frac{1}{2}x-1\Rightarrow x+2<\frac{1}{2}x-1\Rightarrow x<-6$; 2 分

② 当 $-1\leq x\leq 1$ 时, $f(x)<\frac{1}{2}x-1\Rightarrow -x<\frac{1}{2}x-1\Rightarrow x>\frac{2}{3}$, 则 $\frac{2}{3}<x\leq 1$; 3 分

③ 当 $x>1$ 时, $f(x)<\frac{1}{2}x-1\Rightarrow x-2<\frac{1}{2}x-1\Rightarrow x<2$, 则 $1<x<2$ 4 分

综上所述, 不等式 $f(x)<\frac{1}{2}x-1$ 的解集为 $(-\infty, -6)\cup\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ 5 分

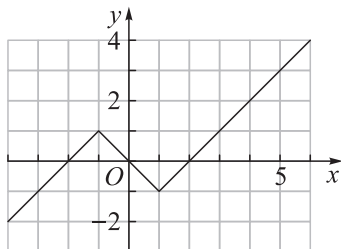
(II) (方法 1) 假设存在正实数 k , 使得对任意的实数 x , 都有 $f(x+k)\geq f(x)$ 成立,

即函数 $y=f(x+k)$ 的图象恒在函数 $y=f(x)$ 的图象的上方或者两个函数的图象重合. 6 分

又因为将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 k 个单位得到函数 $y=f(x+k)$ 的图象,

结合函数 $y=f(x)$ 的图象(如图)可知, 需要将 $y=f(x)$ 的图象至少向左平移 4 个单位, 才能满足题意,

所以 k 的取值范围是 $[4, +\infty)$ 10 分



(方法 2) 假设存在正实数 k , 使得对任意的实数 x , 都有 $f(x+k)\geq f(x)$ 成立.

$f(x)=\begin{cases} x+2, & x<-1, \\ -x, & -1\leq x\leq 1, \\ x-2, & x>1. \end{cases}$

当 $x = -1$ 时, 因为 $f(-1+k) \geq f(-1) = 1 = f(3)$ 成立,

结合函数 $f(x)$ 的图象(如图)可知, $-1+k \geq 3$, 所以 $k \geq 4$ 7 分

下面进一步验证: 若 $k \geq 4$, 则 $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, $f(x+k) \geq f(x)$ 成立.

①当 $x \in (-\infty, -1)$ 时,

$$f(x+k) - f(x) = x+k + |x+k-1| - |x+k+1| - (x+2) = k + |x+k-1| - |x+k+1| - 2.$$

$$\text{因为 } |x+k-1| - |x+k+1| \geq -|(x+k-1) - (x+k+1)| = -2,$$

$$\text{所以 } f(x+k) - f(x) \geq k - 2 - 2 \geq 0,$$

所以 $f(x+k) \geq f(x)$ 成立. 8 分

②当 $x \in (-1, +\infty)$ 时,

$$f(x+k) - f(x) = x+k-2 - (x + |x-1| - |x+1|) = k-2 - |x-1| + |x+1|.$$

$$\text{因为 } |x+1| - |x-1| \geq -|(x+1) - (x-1)| = -2,$$

$$\text{所以 } f(x+k) - f(x) \geq k-2-2 \geq 0,$$

所以 $f(x+k) \geq f(x)$ 成立. 9 分

综上所述, 存在正实数 k , 使得对任意的实数 x , 都有 $f(x+k) \geq f(x)$ 成立, 此时 k 的取值范围是

$[4, +\infty)$ 10 分