成都石室中学 2022－2023 学年度下期高 2023 届三诊模拟考试
理科数学参考答案

双向细目表

题型	题号	具体内容	分值	难度预估
选择题	1	集合运算	5	0.95
选择题	2	复数运算	5	0.9
选择题	3	统计	5	0.95
选择题	4	空间点线面位置关系	5	0.92
选择题	5	等差数列求和	5	0.9
选择题	6	函数的应用	5	0.9
选择题	7	双曲线的几何性质	5	0.9
选择题	8	三角函数的图象与性质	5	0.8
选择题	9	概率	5	0.8
选择题	10	三棱锥外接球的表面积	5	0.7
选择题	11	抽象函数的性质	5	0.5
选择题	12	直线与抛物线的位置关系	5	0.4
填空题	13	向量的坐标运算	5	0.95
填空题	14	二项式定理	5	0.85
填空题	15	等比数列求和	5	0.6
填空题	16	不等式恒成立问题	5	0.4
解答题	17	线性回归分析	12	0.8
解答题	18	解三角形、三角恒等变换	12	0.8
解答题	19	立体几何、面面垂直、二面角	12	0.8
解答题	20	直线与椭圆的位置关系	12	0.45
解答题	21	函数与导数、函数零点问题	12	0.45
解答题	22/23	选修：坐标系与参数方程/不等式选讲	10	0.8
			150	0.75

答案及解析

1. B 【解析】由图可知，阴影部分表示的集合为$(\complement_U B)\cap A$．因为全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid \log_2 x\leqslant 2\}=\{x\mid 0<x\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid 1<x<5\}$，所以$\complement_U B=\{x\mid x\leqslant 1$或$x\geqslant 5\}$，则$(\complement_U B)\cap A=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$．

2. A 【解析】$z-\mathrm{i}=\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{4-2\mathrm{i}}{2}=2-\mathrm{i}$，故$z=2$，所以$\bar{z}=2$．

3. B 【解析】对于A，这14天中有4天空气质量指数在$[150,200)$内，则有4天为“中度污染”，故A错误；对于B，从2日到5日空气质量逐渐下降，即空气质量越来越好，故B正确；对于C，将14天的数据从小到大排列为80，83，138，155，157，165，179，214，214，221，243，260，263，275，其中位数为$\dfrac{1}{2}\times(179+214)=196.5$，故C错误；对于D，5日到7日这三天的数据相差比较大，则连续三天中空气质量指数方

差最小的不是 5 日到 7 日，故 D 错误.

4. D 【解析】m,n 为两条不同的直线，α,β 为两个不同的平面. 对于 A，$m\subset\alpha,n\subset\alpha,m/\!/\beta,n/\!/\beta\Rightarrow\alpha$ 与 β 平行或相交，故 A 错误；对于 B，$\alpha/\!/\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta\Rightarrow m$ 与 n 平行或异面，故 B 错误；对于 C，$m\perp\alpha,m\perp n\Rightarrow n/\!/\alpha$ 或 $n\subset\alpha$，故 C 错误；对于 D，$m/\!/n,n\perp\alpha\Rightarrow m\perp\alpha$，满足直线与平面垂直的性质，故 D 正确.

5. B 【解析】设该等差数列的公差为 d. 因为 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_3=6,S_9=15$，所以 $\begin{cases}3a_1+\frac{1}{2}\times3\times2d=6,\\9a_1+\frac{1}{2}\times9\times8d=15,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=\frac{19}{9},\\d=-\frac{1}{9},\end{cases}$ 所以 $S_{12}=12\times\frac{19}{9}+\frac{1}{2}\times12\times11\times\left(-\frac{1}{9}\right)=18.$

6. C 【解析】由题意，得 $50=10+(90-10)\mathrm{e}^{-10k}$，即 $\mathrm{e}^{-10k}=\frac{1}{2}$，所以 $k=\frac{1}{10}\ln 2$，所以 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\ln 2$. 由 $20=10+(90-10)\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}\ln 2}$，得 $\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}\ln 2}=\frac{1}{8}$，即 $-\frac{t}{10}\ln 2=\ln\frac{1}{8}=-3\ln 2$，解得 $t=30$，即若使物体的温度为 20℃，需要冷却 30 min.

7. C 【解析】由双曲线的方程可得，渐近线的方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$. 因为点 $A\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在渐近线上，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{b}{a}\cdot\frac{3}{2}$，所以 $a=\sqrt{3}b$. 又点 A 在以 OF 为直径的圆上，所以 $OA\perp AF$，所以 $AF^2+OA^2=OF^2$，即 $\left(\frac{3}{2}-c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=c^2$，解得 $c=2$（负值已舍去）. 又 $a^2+b^2=c^2,a>0,b>0$，所以 $a=\sqrt{3},b=1$，所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

8. A 【解析】将 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到 $g(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象. 因为 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$，所以 $\frac{\pi}{4}<\omega x-\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{4}<\omega\pi+\frac{\pi}{4}$. 因为 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ 上单调递增，所以 $\omega\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $0<\omega\leqslant\frac{1}{4}$，所以 ω 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

9. A 【解析】将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，可利用插空法：4 个 1 产生 5 个空，若 2 个 0 相邻，则有 $C_5^1=5$ 种排法；若 2 个 0 不相邻，则有 $C_5^2=10$ 种排法，所以 2 个 0 相邻的概率为 $\frac{5}{5+10}=\frac{1}{3}$.

10. D 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB}=2\sqrt{3}$. 因为 $PA\perp PC_1$，所以 $PA^2+PC_1^2=AC_1^2$，所以 $AB^2+BP^2+(7-BP)^2+B_1C_1^2=AC^2+CC_1^2$，即 $12+BP^2+(7-BP)^2+4=4+49$，即 $BP^2-7BP+6=0$，解得 $BP=1$ 或 $BP=6$. 又因为 $B_1B=7$，且点 P 靠近点 B，所以 $BP=1$. 由正弦定理可得，$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $r=\frac{1}{2}\cdot\frac{AB}{\sin\angle ACB}=2$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径 R 满足 $R^2=r^2+\left(\frac{BP}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$，所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=17\pi$.

11. A 【解析】由 $f'(2-x)+f'(x)=2$，令 $x=1$，得 $2f'(1)=2$，所以 $f'(1)=1$. 由 $f(x-1)$ 为奇函数，得 $f(x-1)=-f(-x-1)$，所以 $f'(x-1)=f'(-x-1)$，故 $f'(x)=f'(-x-2)$①. 又 $f'(2-x)+f'(x)=2$②，由①和②得 $f'(2-x)+f'(-x-2)=2$，即 $f'(4-x-2)+f'(-x-2)=2$，所以 $f'(x)+$

$f'(x+4)=2$③，令 $x=-1$，得 $f'(-1)+f'(3)=2$，得 $f'(3)=-1$；令 $x=1$，得 $f'(1)+f'(5)=2$，得 $f'(5)=1$. 又 $f'(x+4)+f'(x+8)=2$④，由③－④得 $f'(x)-f'(x+8)=0$，即 $f'(x)=f'(x+8)$，所以函数 $f'(x)$是以 8 为周期的周期函数，故 $f'(7)=f'(-1)=3$，所以 $f'(1)+f'(3)+f'(5)+f'(7)=1+(-1)+1+3=4$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{2023} f'(2i-1)=f'(1)+f'(3)+f'(5)+f'(7)+\cdots+f'(4045)=505[f'(1)+f'(3)+f'(5)+f'(7)]+f'(1)+f'(3)+f'(5)=2020+1=2021$.

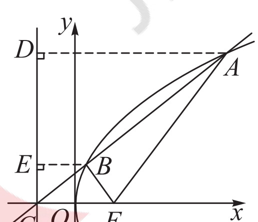
12. C 【解析】由题意，设直线 $l:x=ky-2$，不妨令 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$都在第一象限，$C(-2,0)$，$F(2,0)$，如图所示. 联立抛物线 $E:y^2=8x$ 与直线 l 的方程，得 $y^2-8ky+16=0$，且$\Delta=64(k^2-1)>0$，即 $k^2>1$，所以 $y_1+y_2=8k$，$y_1y_2=16$，则 $x_1+x_2=8k^2-4$，$x_1x_2=4$.

①若 BF 为$\triangle ACF$ 的中线，则 $y_2=\dfrac{y_1}{2}$，所以 $y_1=4\sqrt{2}$，所以 $x_1=4$，故 $A(4,4\sqrt{2})$，所以 $B(1,2\sqrt{2})$，则 $|AF|=2|BF|=6$，故①正确；

②若 BF 为$\angle AFC$ 的平分线，则$\dfrac{|BC|}{|AB|}=\dfrac{|CF|}{|AF|}$，分别作 AD，BE 垂直准线 $x=-2$ 于点 D，E，则$|AF|=|AD|$且$\dfrac{|BC|}{|AB|}=\dfrac{|CE|}{|DE|}$，所以$\dfrac{|CF|}{|AD|}=\dfrac{|CE|}{|DE|}$，即$\dfrac{|CF|}{|AD|+|CF|}=\dfrac{|CE|}{|CD|}=\dfrac{|BE|}{|AD|}$，则$\dfrac{4}{x_1+6}=\dfrac{x_2+2}{x_1+2}$，将 $x_2=\dfrac{4}{x_1}>0$ 代入整理，得 $x_1^2-4x_1-12=0$，即$(x_1-6)(x_1+2)=0$，则 $x_1=6$，所以$|AF|=x_1+2=8$，故②正确；

③若$|AC|=\sqrt{2}|AF|$，即$|AC|=\sqrt{2}|AD|$，即$\triangle ACD$ 为等腰直角三角形，此时$|CD|=|AD|$，则 $A(y_1-2,y_1)$，所以 $y_1^2=8y_1-16$，所以 $y_1^2-8y_1+16=0$，所以 $y_1=4$，所以 $y_2=4$，此时 A，B 为同一点，不合题设，故③错误；

④$|AF|+|BF|=|AD|+|BE|=x_1+x_2+4=8k^2$，而 $2|CF|=8$，结合 $k^2>1$，得 $8k^2>8$，即$|AF|+|BF|>2|CF|$恒成立，故④正确.

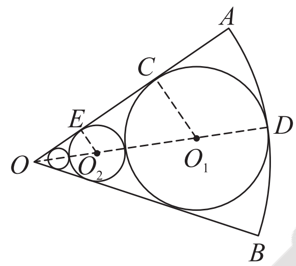


13. $2\sqrt{5}$ 【解析】由 $\boldsymbol{a}=(-2,\lambda)$，$\boldsymbol{b}=(3,1)$，得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,\lambda+1)$. 因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=(1,\lambda+1)\cdot(3,1)=3+1+\lambda=0$，解得 $\lambda=-4$，故 $\boldsymbol{a}=(-2,-4)$，所以$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$.

14. 20 【解析】因为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(x^2)^{6-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r=\mathrm{C}_6^r\cdot 2^r\cdot x^{12-3r}$，$r=0,1,2,\cdots,6$. 令 $12-3r=3$，得 $r=3$，所以 x^3 项的二项式系数为 $\mathrm{C}_6^3=20$.

15. $\dfrac{9\pi}{8}\left(1-\dfrac{1}{9^n}\right)$ 【解析】如图，设圆 O_1 与弧 AB 相切于点 D，圆 O_1，圆 O_2 与 OA 分别切于点 C，E，则 $O_1C\perp OA$，$O_2E\perp OA$. 设圆 O_1，圆 O_2，圆 O_3，…，圆 O_n 的半径分别为 $r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n$. 因为$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，所以$\angle AOD=\dfrac{\pi}{6}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1C$ 中，$OO_1=3-r_1$，则 $O_1C=\dfrac{1}{2}OO_1$，即 $r_1=\dfrac{3-r_1}{2}$，解得 $r_1=1$. 在

$Rt\triangle OO_2E$ 中，$OO_2=3-r_2-2r_1$，则 $O_2E=\frac{1}{2}OO_2$，即 $r_2=\frac{3-r_2-2r_1}{2}$，解得 $r_2=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}r_1$. 同理可得，$r_3=\frac{1}{9}=\frac{1}{3}r_2$，所以 $r_1,r_2,r_3,\cdots,r_n$ 是以 $r_1=1$ 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列. 又因为圆的面积公式为 $S=\pi r^2$，所以面积 $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n$ 构成一个以 $\pi r_1^2=\pi$ 为首项，以 $\frac{1}{9}$ 为公比的等比数列，则 $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=\frac{\pi\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9\pi}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$.



16. $[0,2]$　**【解析】**由已知，得 $f'(x)=\frac{2}{x}+a(2x-3)=\frac{2ax^2-3ax+2}{x}(x>1)$. 令 $g(x)=2ax^2-3ax+2$.

①若 $a=0$，则 $g(x)=2$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)=\frac{2}{x}>0$，所以 $f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，所以当 $x\in(1,+\infty)$时，$f(x)>f(1)=0$ 成立.

②若 $a>0$，则 $g(x)=2ax^2-3ax+2$ 图象的对称轴为直线 $x=-\frac{-3a}{4a}=\frac{3}{4}$，所以 $g(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，$g(1)=2a-3a+2=2-a$.

ⅰ)当 $0<a\leqslant 2$ 时，$g(1)=2-a\geqslant 0$，$\forall x\in(1,+\infty)$，$g(x)>g(1)\geqslant 0$，所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，所以当 $x\in(1,+\infty)$时，$f(x)>f(1)=0$ 成立；

ⅱ)当 $a>2$ 时，$g(1)=2-a<0$，$\exists x_0\in(1,+\infty)$，使 $g(x_0)=0$，当 $x\in(1,x_0)$时，$g(x)<0$，所以 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$在区间$(1,x_0)$上单调递减，所以当 $x\in(1,x_0)$时，$f(x)<f(1)=0$，不合题意.

③若 $a<0$，则 $f(x)=2\ln x+a(x^2-3x+2)=2\ln x+a(x-1)(x-2)$. 令 $h(x)=\ln x-(x-1)$，$x\in(1,+\infty)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递减，所以当 $x\in(1,+\infty)$时，$h(x)=\ln x-(x-1)<h(1)=0$，所以当 $x\in(1,+\infty)$时，$\ln x<x-1$，所以 $f(x)=2\ln x+a(x-1)(x-2)<2(x-1)+a(x-1)(x-2)=(x-1)[2+a(x-2)]$. 令 $F(x)=(x-1)[2+a(x-2)]$，由 $F(x)=0$ 解得 $x_1=1$，$x_2=2-\frac{2}{a}>2$，即 $\exists x_2\in(2,+\infty)$，使 $f(x)<F(x_2)=0$，不合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围为$[0,2]$.

17. 解：(Ⅰ)由题意，知 $\bar{x}=10$，$\bar{y}=20$，…………………………………………………………… 1 分

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(6-10)(15-20)+(8-10)(18-20)+(10-10)(20-20)+(12-10)(24-20)+(14-10)(23-20)=20+4+0+8+12=44$，…………………………………………… 3 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=16+4+0+4+16=40$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=25+4+0+16+9=54$，…………………… 5 分

所以 $r=\dfrac{44}{\sqrt{40\times54}}=\dfrac{11}{3\sqrt{15}}$.

又 $3\sqrt{15}\approx11.62$，则 $r\approx0.95$.

因为 y 与 x 的相关系数近似为 0.95，说明 y 与 x 的线性相关非常高，

所以可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. …………………………………………………… 7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{44}{40}=1.1$，

则 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=20-1.1\times10=9$，

所以 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=1.1x+9$，…………………………………………… 10 分

当 $x=20$ 时，$\hat{y}=1.1\times20+9=31$，

所以预测车辆发车间隔时间为 20 分钟时乘客的等候人数为 31 人. ……………………… 12 分

18. 解：（Ⅰ）在△ABC 中，$\sin(A+C)=\sin B$，$\sin(B+C)=\sin A$，……………………………… 1 分

所以 $2\sin B+2b\sin A=7\sqrt{3}$.

由正弦定理，知 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，且 $a=6$，则 $b\sin A=6\sin B$，…………………………………… 3 分

所以 $2\sin B+12\sin B=7\sqrt{3}$，解得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为△ABC 为锐角三角形，故 $B=\dfrac{\pi}{3}$. …………………………………………………… 5 分

（Ⅱ）因为 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{DC}$，所以点 D 在线段 AC 上，且 $AD=2DC$. ………………………… 6 分

设 $\angle BDA=\theta$，$CD=x$，则 $AD=2x$，$AC=3x$.

在△BDA 中，由余弦定理，知 $\cos\theta=\dfrac{37+4x^2-c^2}{4\sqrt{37}x}$①. …………………………………… 7 分

在△BDC 中，由余弦定理，知 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\dfrac{37+x^2-36}{2\sqrt{37}x}$②. ……………………… 8 分

由①+②，整理得 $6x^2+39-c^2=0$，即 $x^2=\dfrac{c^2-39}{6}$③. ……………………………………… 9 分

在△ABC 中，$\cos\angle ABC=\dfrac{36+c^2-9x^2}{12c}=\dfrac{1}{2}$，即 $36+c^2-9x^2=6c$④. ……………………… 11 分

将③代入④，整理得 $c^2+12c-189=0$，解得 $c=9$ 或 $c=-21$（舍去），故 $c=9$. ………………… 12 分

19.（Ⅰ）证明：因为四边形 $ABCD$ 为菱形，$AC\cap BD=O$，

所以 O 为 BD 的中点，$AC\perp BD$.

又因为 $PB=PD$，所以 $PO\perp BD$.

又 $AC\cap PO=O$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC.

又 $BD\subset$ 平面 PBD，

所以平面 $PBD\perp$ 平面 PAC. ……………………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)解:因为 $PA=PC$,O 为 AC 的中点,所以 $PO\perp AC$.

又 $PO\perp BD$,$AC\cap BD=O$,

所以 $PO\perp$平面 $ABCD$.

因为 M 为线段 PD 的中点,O 为 BD 的中点,所以 $OM\parallel PB$. …………………………………… 5 分

又因为直线 OM 与平面 $ABCD$ 所成角为 $60°$,

所以直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角为$60°$,即$\angle PBO=60°$.

因为$\angle BAD=60°$,$AD=AB=2$,

所以$\triangle ABD$ 是等边三角形,

所以 $OB=1$,$OA=\sqrt{3}$,则 $OP=\sqrt{3}$. ………………………………………………………………… 6 分

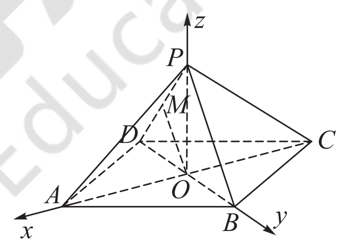
如图,以点 O 为坐标原点,以 OA,OB,OP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $A(\sqrt{3},0,0)$,$B(0,1,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$C(-\sqrt{3},0,0)$,$D(0,-1,0)$,

所以$\overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},0,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{PB}=(0,1,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},-1,0)$. ………………………… 7 分

设平面 PAD 和平面 PBC 的一个法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$.

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{3}x_1-\sqrt{3}z_1=0,\\ -\sqrt{3}x_1-y_1=0,\end{cases}$



令 $x_1=1$,得 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},1)$.

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}y_2-\sqrt{3}z_2=0,\\ -\sqrt{3}x_2-y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1$,得 $\boldsymbol{n}_2=(1,-\sqrt{3},-1)$. …………………………………………………………………… 10 分

因此,$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{3}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$, ………………………………………………………… 11 分

所以平面 PAD 与平面 PBC 所成的二面角的正弦值为$\dfrac{4}{5}$. ………………………………………… 12 分

20. (Ⅰ)解:因为点 M 是椭圆 C 上异于左、右顶点 A_1,A_2 的任意一点,且直线 MA_1 与直线 MA_2 的斜率之积为$-\dfrac{3}{4}$,

所以根据椭圆的相关性质可知,$-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$. ……………………………………………………… 2 分

又因为 $c=1$,$a^2-b^2=c^2$,

所以 $a=2$,$b=\sqrt{3}$,

故椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………… 3 分

(Ⅱ)证明:设直线 A_1M 的方程为 $y=k(x+2)$,$k\neq0$.

由$\begin{cases}y=k(x+2),\\ x=2,\end{cases}$得 $N(2,4k)$. ……………………………………………………………………… 4 分

因为 $2\overrightarrow{A_1E}=\overrightarrow{A_1N}+\overrightarrow{A_1A_2}$,

所以点 E 是线段 NA_2 的中点，即 $E(2,2k)$. ………… 5 分

设 $M(x_0,y_0)$.

由 $\begin{cases} y=k(x+2), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$，则 $\begin{cases} x_0=\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2}, \\ y_0=\dfrac{12k}{3+4k^2}. \end{cases}$ ………… 6 分

①当 $MF\perp x$ 轴时，$x_0=1$，此时 $k=\pm\dfrac{1}{2}$，

所以 $M\left(1,\pm\dfrac{3}{2}\right)$，$N(2,\pm2)$，$E(2,\pm1)$.

此时，点 E 在 $\angle A_2FM$ 的平分线所在的直线 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$ 上，

即 $\angle EFA_2=\angle EFM$. ………… 7 分

②当 $k\neq\pm\dfrac{1}{2}$ 时，直线 MF 的斜率为 $k_{MF}=\dfrac{y_0}{x_0-1}=\dfrac{4k}{1-4k^2}$，

所以直线 MF 的方程为 $4kx+(4k^2-1)y-4k=0$，

则点 E 到直线 MF 的距离为 $d=\dfrac{|8k+2k(4k^2-1)-4k|}{\sqrt{16k^2+(4k^2-1)^2}}=\dfrac{|4k+2k(4k^2-1)|}{\sqrt{(4k^2+1)^2}}=\dfrac{|2k(4k^2+1)|}{|4k^2+1|}=$

$|2k|=|A_2E|$，………… 11 分

所以点 E 在 $\angle A_2FM$ 的平分线上，即 $\angle EFA_2=\angle EFM$.

综上所述，$\angle EFA_2=\angle EFM$. ………… 12 分

21. (Ⅰ)解：因为 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(x+2)-(\ln x-\ln 2)}{(x+2)^2}-a\cdot\dfrac{2}{x^2}$，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{3}$，

所以 $f'(1)=\dfrac{3+\ln 2}{9}-2a=\dfrac{1}{3}$，则 $a=\dfrac{\ln 2}{18}$. ………… 3 分

(Ⅱ)(ⅰ)解：因为 $x>0$，所以 $f(x)=0\Leftrightarrow(x+2)f(x)=0\Leftrightarrow\ln\dfrac{x}{2}-ax+\dfrac{4a}{x}=0$. ………… 4 分

令 $h(x)=\ln\dfrac{x}{2}-ax+\dfrac{4a}{x}$.

因为函数 $f(x)$ 有且仅有三个不同的零点，

所以函数 $h(x)$ 有且仅有三个不同的零点.

$h'(x)=\dfrac{1}{x}-a-\dfrac{4a}{x^2}=\dfrac{-ax^2+x-4a}{x^2}$.

设 $k(x)=-ax^2+x-4a$，$a\in(0,+\infty)$，则 $\Delta=1-16a^2$. ………… 5 分

①当 $\begin{cases} \Delta\leqslant0, \\ a>0, \end{cases}$ 即 $a\geqslant\dfrac{1}{4}$ 时，$k(x)\leqslant0$，$h'(x)\leqslant0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(x)$ 不可能有三个不同的零点，即函数 $f(x)$ 不可能有三个不同的零点，舍去. ………… 6 分

②当 $\begin{cases} \Delta>0, \\ a>0, \end{cases}$ 即 $0<a<\dfrac{1}{4}$ 时，$k(x)$ 有两个不同的零点.

由 $k(x)=-ax^2+x-4a=0$，得 $x_4=\dfrac{1-\sqrt{1-16a^2}}{2a}$，$x_5=\dfrac{1+\sqrt{1-16a^2}}{2a}$，所以 $x_4>0$，$x_5>0$.

又因为 $k(x)=-ax^2+x-4a$ 开口向下，

所以当 $0<x<x_4$ 时，$k(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(0,x_4)$上单调递减；

当 $x_4<x<x_5$ 时，$k(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$在(x_4,x_5)上单调递增；

当 $x>x_5$ 时，$k(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(x_5,+\infty)$上单调递减. ………………………………… 7 分

因为 $h(2)=\ln 1-2a+\frac{4a}{2}=0$，且 $x_4x_5=4$，

所以 $x_4<2<x_5$，所以 $h(x_4)<h(2)=0<h(x_5)$.

因为 $h\left(\frac{1}{a^2}\right)=\ln\frac{1}{2a^2}-a\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{4a}{\frac{1}{a^2}}=-\ln 2-2\ln a-\frac{1}{a}+4a^3$，

令 $m(a)=-\ln 2-2\ln a-\frac{1}{a}+4a^3$，$a\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$， ………………………………………………… 8 分

则 $m'(a)=-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}+12a^2=\frac{12a^4-2a+1}{a^2}>\frac{1-2a}{a^2}>0$，

所以 $m(a)$在$\left(0,\frac{1}{4}\right)$上单调递增，

所以 $m(a)<m\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln 2-2\ln\frac{1}{4}-4+4\left(\frac{1}{4}\right)^3=3\ln 2-4+\frac{1}{16}<0$，即 $h\left(\frac{1}{a^2}\right)<0$.

由函数零点存在性定理可知，$h(x)$在区间$\left(x_5,\frac{1}{a^2}\right)$上有唯一的一个零点 x_0. ……………… 9 分

因为 $h(x_0)+h\left(\frac{4}{x_0}\right)=\ln\frac{x_0}{2}-ax_0+\frac{4a}{x_0}+\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x_0}\right)-a\cdot\frac{4}{x_0}+\frac{4a}{\frac{4}{x_0}}=0$， ……………………………… 10 分

又 $h(x_0)=0$，

所以 $h\left(\frac{4}{x_0}\right)=0$，则 $0<\frac{4}{x_0}<x_4$，

所以 $h(x)$在区间$(0,x_4)$上有唯一的一个零点$\frac{4}{x_0}$，

故当 $0<a<\frac{1}{4}$时，$h(x)$有且仅有三个不同的零点$\frac{4}{x_0}$，2，x_0.

综上所述，若函数 $f(x)$有且仅有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{4}\right)$. …………… 11 分

ⅱ)证明：因为函数 $f(x)$的三个不同的零点分别为 x_1,x_2,x_3，

所以由ⅰ)可知，$x_1x_2x_3=\frac{4}{x_0}\cdot 2\cdot x_0=8$. ……………………………………………………………… 12 分

22. 解：(Ⅰ)由已知可得，曲线 C_1 的普通方程为$(x-3)^2+(y-3)^2=r^2$，

所以曲线 C_1 是以$(3,3)$为圆心，r 为半径的圆. ………………………………………………………… 1 分

因为 $\rho=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\rho=2\sin\theta+2\cos\theta\Rightarrow\rho^2=2\rho\sin\theta+2\rho\cos\theta$，

即 $x^2+y^2=2x+2y\Rightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=2$，

所以曲线 C_2 是以$(1,1)$为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆. ……………………………………………………… 3 分

若曲线 C_1 与 C_2 有且仅有一个公共点，则两圆相切，

所以$\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=r+\sqrt{2}$或$\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=\left|r-\sqrt{2}\right|$.

又$r>0$,所以$r=\sqrt{2}$或$r=3\sqrt{2}$. …………………………………………………… 5分

(Ⅱ)将两圆的方程相减,得$4x+4y+r^2-18=0$,

所以直线AB的方程为$4x+4y+r^2-18=0$. …………………………………………… 6分

因为$|AB|=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$,

所以圆C_2的圆心到直线AB的距离为$d=\sqrt{2-\left(\dfrac{|AB|}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{|4+4-18+r^2|}{\sqrt{4^2+4^2}}$,

解得$r^2=12$或$r^2=8$, …………………………………………………………………… 8分

则直线AB的方程为$2x+2y-3=0$或$2x+2y-5=0$,

故直线AB的极坐标方程为$2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-3=0$或$2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-5=0$. ……………… 10分

23. 解:(Ⅰ)$f(x)=|x-1|-|x+1|+x=\begin{cases}x+2,x<-1,\\-x,-1\leqslant x\leqslant 1,\\x-2,x>1.\end{cases}$ …………………………………… 1分

①当$x<-1$时,$f(x)<\dfrac{1}{2}x-1\Rightarrow x+2<\dfrac{1}{2}x-1\Rightarrow x<-6$; …………………………………… 2分

②当$-1\leqslant x\leqslant 1$时,$f(x)<\dfrac{1}{2}x-1\Rightarrow -x<\dfrac{1}{2}x-1\Rightarrow x>\dfrac{2}{3}$,则$\dfrac{2}{3}<x\leqslant 1$;…………………………… 3分

③当$x>1$时,$f(x)<\dfrac{1}{2}x-1\Rightarrow x-2<\dfrac{1}{2}x-1\Rightarrow x<2$,则$1<x<2$. …………………………………… 4分

综上所述,不等式$f(x)<\dfrac{1}{2}x-1$的解集为$(-\infty,-6)\cup\left(\dfrac{2}{3},2\right)$. …………………………………… 5分

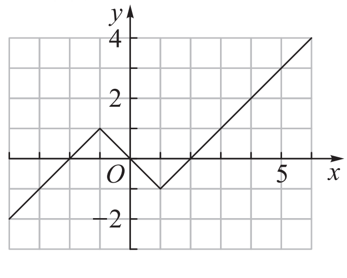
(Ⅱ)(方法1)假设存在正实数k,使得对任意的实数x,都有$f(x+k)\geqslant f(x)$成立,

即函数$y=f(x+k)$的图象恒在函数$y=f(x)$的图象的上方或者两个函数的图象重合. ……… 6分

又因为将函数$y=f(x)$的图象向左平移k个单位得到函数$y=f(x+k)$的图象,

结合函数$y=f(x)$的图象(如图)可知,需要将$y=f(x)$的图象至少向左平移4个单位,才能满足题意,

所以k的取值范围是$[4,+\infty)$. ………………………………………………………… 10分



(方法2)假设存在正实数k,使得对任意的实数x,都有$f(x+k)\geqslant f(x)$成立.

$f(x)=\begin{cases}x+2,x<-1,\\-x,-1\leqslant x\leqslant 1,\\x-2,x>1.\end{cases}$

当 $x=-1$ 时,因为 $f(-1+k)\geqslant f(-1)=1=f(3)$成立,

结合函数 $f(x)$的图象可知,$-1+k\geqslant 3$,所以 $k\geqslant 4$. ………………………………………………… 7 分

下面进一步验证:若 $k\geqslant 4$,则 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,$f(x+k)\geqslant f(k)$成立.

①当 $x\in(-\infty,-1)$时,

$f(x+k)-f(x)=x+k+|x+k-1|-|x+k+1|-(x+2)=k+|x+k-1|-|x+k+1|-2.$

因为$|x+k-1|-|x+k+1|\geqslant -|(x+k-1)-(x+k+1)|=-2$,

所以 $f(x+k)-f(x)\geqslant k-2-2\geqslant 0$,

所以 $f(x+k)\geqslant f(x)$成立. ………………………………………………………………………… 8 分

②当 $x\in(-1,+\infty)$时,

$f(x+k)-f(x)=x+k-2-(x+|x-1|-|x+1|)=k-2-|x-1|+|x+1|.$

因为$|x+1|-|x-1|\geqslant -|(x+1)-(x-1)|=-2$,

所以 $f(x+k)-f(x)\geqslant k-2-2\geqslant 0$,

所以 $f(x+k)\geqslant f(x)$成立. ………………………………………………………………………… 9 分

综上所述,存在正实数 k,使得对任意的实数 x,都有 $f(x+k)\geqslant f(x)$成立,此时 k 的取值范围是 $[4,+\infty)$. ………………………………………………………………………………………… 10 分