

南充市高 2023 届“三诊”文科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	D	B	C	B	A	C	A	A	D	C	C	B

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题卡上。

13. $(2, +\infty)$ 14. 1400 15. $\frac{13}{4}$ 16. ①③④

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17—21 题必考题，每个试题考生必须作答。

第 22、23 题为选考题，考试根据要求作答。

(一)必考题

17. 解：(1) $\because 2S_n = 3a_n - 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2S_{n-1} = 3a_{n-1} - 3 \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \text{..... (2 分)}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得: } 2a_n = 3a_n - 3a_{n-1}, \text{ 即 } a_n = 3a_{n-1} (n \geq 2)$$

$$\because a_1 = 3$$

 $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 以 3 为首项, 3 为公比的等比数列.

$$\therefore a_n = 3^n (n \in \mathbb{N}^*) \quad \text{..... (6 分)}$$

(2) $\because b_n = a_n + \log_3 a_n = 3^n + n \quad \text{..... (7 分)}$

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n = (3^1 + 1) + (3^2 + 2) + \cdots + (3^{n-1} + n-1) + (3^n + n) \\ &= (3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} + 3^n) + (1 + 2 + \cdots + n-1 + n) \\ &= \frac{3(1-3^n)}{1-3} + \frac{(1+n)n}{2} = \frac{3^{n+1} + n^2 + n - 3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n = \frac{3^{n+1} + n^2 + n - 3}{2} \quad \text{..... (12 分)}$$

18. 解：(1) 由 $\bar{x} = \frac{2+3+4+5+6+8+9+11}{8} = 6$, $\bar{y} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i = \frac{48.6}{8} = 6.075$ 得: (2 分)

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{334.1 - 8 \times 6 \times 6.075}{356 - 8 \times 36} = 0.625 \quad \text{..... (4 分)}$$

$$\text{由 } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} \text{ 得 } \hat{a} = 6.075 - 0.625 \times 6 = 2.325$$

所以年收入的附加额 y 与投资额 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.625x + 2.325$ (6 分)

(2) 已知这 8 家企业中投资额不少于 5 百亿元的企业有 5 家,

其中收入附加额大于投资额的企业有 2 家, 编号为 A_1, A_2 ; 余下 3 家编号为 B_1, B_2, B_3

现从中 5 家中任选 3 家, 基本事件总数为 10, 情况如下:

$(A_1, A_2, B_1), (A_1, A_2, B_2), (A_1, A_2, B_3), (A_1, B_1, B_2), (A_1, B_1, B_3), (A_1, B_2, B_3), (A_2, B_1, B_2),$
 $(A_2, B_1, B_3), (A_2, B_2, B_3), (B_1, B_2, B_3)$

其中抽取的 3 家企业中恰有 1 家企业的收入附加额大于投资额的情况共有 6 种，情况如下：

$(A_1, B_1, B_2), (A_1, B_1, B_3), (A_1, B_2, B_3), (A_2, B_1, B_2), (A_2, B_1, B_3), (A_2, B_2, B_3)$ (10 分)

故抽取的 3 家企业中恰有 1 家企业的收入附加额大于投资额的概率 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (12 分)

19. 证明：(1) 连接 MO 并延长交 AD 于 N

$\because M$ 为劣弧 $\widehat{BC}$ 的中点

$\therefore MO$ 是 $\angle BOC$ 的角平分线，

$\therefore MN$ 平分 $\angle AOD$

$\because OA = OD$

$\therefore MN \perp AD$ (4 分)

又 $\because$ 在圆锥 SO 中， $SO \perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore SO \perp AD$

$\because MN, SO \subset$ 平面 SMN ，且 $MN \cap SO = O$

$\therefore AD \perp$ 平面 SMN

又 $\because SM \subset$ 平面 SMN

故 $AD \perp SM$ (6 分)

(2) 设 MO 交 BC 于 F ，显然 OF 平分 $\angle BOC$ ，且 $OF \perp BC$

$$\text{又 } \angle BOC = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \angle COF = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \text{在 } \triangle COF \text{ 中, } OF = \frac{1}{2}CO,$$

$\therefore F$ 为 OM 的中点.

$$\text{同理 } ON = \frac{1}{2}OD$$

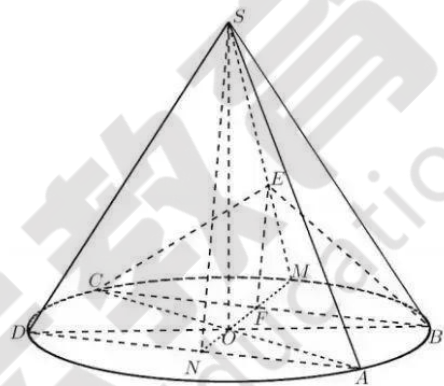
$$\therefore NF = 2FM \text{ (7 分)}$$

$$\text{又 } \because SE = 2EM$$

$$\therefore \frac{ME}{SE} = \frac{MF}{NF} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore EF \parallel SN$$

$\because SN \subset$ 平面 SAD



$\therefore EF \parallel$ 平面 SAD (9 分)

又 $\because AC, BD$ 是底面的两条直径

$\therefore BC \parallel AD$

$\therefore BC \parallel$ 平面 SAD

又 $\because EF, BC \subset$ 平面 BCE , 且 $EF \cap BC = F$

$\therefore$ 平面 $BCE \parallel$ 平面 SAD (12 分)

20. 解析: (1) 由题意易知, 动点 P 的轨迹是以 $M(-\sqrt{3}, 0), N(\sqrt{3}, 0)$ 为焦点的椭圆, 且 $2a=4$

$\therefore$ 动点 P 的轨迹 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (4 分)

(2) 显然直线 AD 的斜率存在, 设 AD 的方程为: $y = k(x+2)$

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = k(x+2) \end{cases}$ 得: $(4k^2+1)x^2 + 16kx + 4(4k^2-1) = 0$

由 $-2x_1 = \frac{4(4k^2-1)}{4k^2+1}$ 得: $x_1 = \frac{2(1-4k^2)}{4k^2+1}$ $\therefore y_1 = k(x_1+2) = \frac{4k}{4k^2+1}$

$\therefore D\left(\frac{2(1-4k^2)}{4k^2+1}, \frac{4k}{4k^2+1}\right)$ (6 分)

由 $AD \parallel BE$ 可设 BE 的方程为 $y = kx - 1$

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx - 1 \end{cases}$ 得: $(4k^2+1)x^2 - 8kx = 0$

$\therefore x_2 = \frac{8k}{4k^2+1}$

$\therefore y_2 = k \frac{8k}{4k^2+1} - 1 = \frac{4k^2-1}{4k^2+1}$

$\therefore E\left(\frac{8k}{4k^2+1}, \frac{4k^2-1}{4k^2+1}\right)$ (8 分)

法 1:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OD}| \cdot |\overrightarrow{OE}| \cdot \sin \angle DOE = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OD}| \cdot |\overrightarrow{OE}| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{OD}| \cdot |\overrightarrow{OE}|} \right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OD}|^2 \cdot |\overrightarrow{OE}|^2 - (\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2} = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \frac{2(1-4k^2)}{4k^2+1} \cdot \frac{4k^2-1}{4k^2+1} - \frac{8k}{4k^2+1} \cdot \frac{4k}{4k^2+1} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{2(4k^2-1)^2 + 32k^2}{(4k^2+1)^2} \right| = \frac{(4k^2-1)^2 + 16k^2}{(4k^2+1)^2} \\
 &= \frac{(4k^2+1)^2}{(4k^2+1)^2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

∴ S 为定值 1 (12 分)

法2: DE 的方程为: $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$, 即 $(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

∴ O 到 DE 的距离为

$$d = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}} = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{|DE|}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |DE| = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1|$$

后同

21. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{2}x^2 - x$, $f'(x) = \frac{1-x}{e^x} + x - 1 = \frac{(x-1)(e^x-1)}{e^x}$

由 $f'(x) > 0$ 得: $x < 0$ 或 $x > 1$; 由 $f'(x) < 0$ 得: $0 < x < 1$ (2 分)

列表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

$$\therefore f(x)_{\text{极大}} = f(0) = 0; f(x)_{\text{极小}} = f(1) = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} \dots \dots \dots (5 \text{ 分})$$

(2). 由 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 知: $h(x) \geq g(x)$

(i) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$

∴ $h(x) > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上无零点. (6 分)

(ii) 当 $x=1$ 时, $g(1) = 0$, $f(1) = \frac{a}{e} - \frac{1}{2}$ 知: $f(1) \leq 0$ 时, $0 \leq a \leq \frac{e}{2}$, $h(1) = 0$, $x=1$ 是 $h(x)$ 的零点;

$f(1) > 0$ 时, $a > \frac{e}{2}$, $h(1) > 0$, $x=1$ 不是 $h(x)$ 的零点; (8 分)

(iii) 当 $x \in (0,1)$ 时, $g(x) < 0$. 故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 的零点就是 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 的零点.

由 $f(x) = 0$ 得: $a = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)e^x$.

设 $\varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)e^x$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(1-x)e^x$.

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

又 $\varphi(0) = 1, \varphi(1) = \frac{e}{2}$,

$\therefore$ 当 $a \geq \frac{e}{2}$ 时, $f(x)$ 即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上无零点; (10 分)

当 $1 < a < \frac{e}{2}$ 时, $f(x)$ 即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上有 1 个零点;

当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $f(x)$ 即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上无零点;

综上所述: $1 < a < \frac{e}{2}$ 时, $h(x)$ 有 2 个零点;

$0 \leq a \leq 1$ 或 $a = \frac{e}{2}$ 时, $h(x)$ 有 1 个零点; (12 分)

$a > \frac{e}{2}$ 时, $h(x)$ 无零点.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. 解: (1) C_1 的直角坐标方程为 $x + y - 4 = 0$ (2 分)

C_2 的极坐标方程 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta - 4 = 0$ (5 分)

(2) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)

将 $\begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数) 代入 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ 得: $t^2 + \sqrt{2}t - 8 = 0$ (7 分)

显然 $\Delta > 0$, 设点 A, B 在直线 l 上对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则

$$t_1 + t_2 = -\sqrt{2}, t_1 \cdot t_2 = -8 < 0$$

$\therefore \overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角为 π

$$\therefore \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = |t_1| \cdot |t_2| \cos \pi = -8 \dots\dots\dots (10 \text{分})$$

$$23. \text{解: (1) 由 } f(x) = |x-1| + |x-3| = \begin{cases} -2x+4, & x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 3 \\ 2x-4, & x > 3 \end{cases}$$

得函数 $f(x)$ 图像如右图所示,

$$\therefore f(0) = f(4) = 4$$

所以 $2 < m < 4 \dots\dots\dots (5 \text{分})$

(2) 由 $f(x)$ 图像可知: 其图像关于 $x=2$ 对称,

故 $a+b=4$

$$\therefore (\sqrt{a} + \sqrt{5b})^2 = (1 \cdot \sqrt{a} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{b})^2 \leq [1^2 + (\sqrt{5})^2] [(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2] = 6(a+b) = 24$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{5b} \leq 2\sqrt{6}, \text{ 当且仅当 } \frac{\sqrt{a}}{1} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{5}}, \text{ 即 } a = \frac{2}{3}, b = \frac{10}{3} \text{ 时等号成立.}$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{5b} \text{ 的最大值为 } 2\sqrt{6} \dots\dots\dots (10 \text{分})$$