

成都七中高三数学高考模拟考试(文科)参考答案

一、选择题： CDDC BDDA BBAC

12.解.由条件有 $e \cos \theta = 2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{e} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{e^2 - 4}}{2}$.

由中点弦性质, $k_{AB} k_{OM} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow k_{OM} \cdot \frac{\sqrt{e^2 - 4}}{2} = e^2 - 1$, 于是

$$k_{OM} = \frac{2(e^2 - 1)}{\sqrt{e^2 - 4}} = 2(\sqrt{e^2 - 4} + \frac{3}{\sqrt{e^2 - 4}}) \geq 4\sqrt{3}$$

取等条件是 $e = \sqrt{7}$. 故选 C.

二、填空题： -1; 0; 5; $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

三、解答题

17.解.(1)设这4天为 a, b, c, d , 则从 a, b, c, d 中任取两天的取法共6种:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$$

其中两天销量之和恰为60件的只有1种, 两天销量之和大于60件的有5种,

故所求概率为 $\frac{5}{6}$4分

(2)(i) 设乙商家的日销售量为 a 件, 则

当 $a = 28$ 时, $X = 28 \times 5 = 140$; 当 $a = 29$ 时, $X = 29 \times 5 = 145$;

当 $a = 30$ 时, $X = 30 \times 5 = 150$; 当 $a = 31$ 时, $X = 30 \times 5 + 1 \times 10 = 160$.

所以 X 的所有可能取值的集合为 $\Omega = \{140, 145, 150, 160\}$8分

(ii) 由于 $a = 28$ 的有1天, 故 $P(X = 140) = \frac{1}{10}$;

$a = 29$ 和 $a = 30$ 的各2天, 故 $P(X = 145) = P(X = 150) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

$a = 31$ 的有5天, 故 $P(X = 160) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

于是存在 $k = 160$, 使得 $P(X = k) \geq P(X \neq k)$12分

18.解.(1)证明: 取 BC 中点 O , 连结 AO, DO .

$$\because BD = CD = \sqrt{5}, \therefore DO \perp BC, \text{ 且 } DO = \sqrt{CD^2 - OC^2} = 2.$$

再由平面 BCD 与平面 ABC 垂直, $DO \subset$ 平面 BCD 且 $DO \perp BC$ 知 $DO \perp$ 平面 ABC .

$\because AE \perp$ 平面 $ABC, \therefore AE \parallel DO$.

又 $DO = 2 = AE, \therefore$ 四边形 $AODE$ 是平行四边形, 故 $ED \parallel AO$.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AO \perp BC$,

$\because AO \subset \text{平面 } ABC, \text{平面 } BCD \cap \text{平面 } ABC = BC, \text{平面 } BCD \perp \text{平面 } ABC,$

$\therefore AO \perp \text{平面 } BCD, \therefore ED \perp \text{平面 } BCD,$

$\because ED \subset \text{平面 } EBD, \therefore \text{平面 } EBD \perp \text{平面 } BCD. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

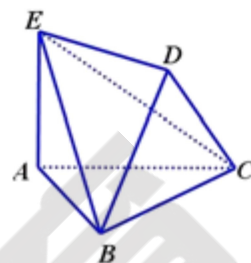
(2)记三棱锥 $E-ABC$ 和三棱锥 $E-DBC$ 的体积分别为 V_1, V_2 , 则多面体 $ABCDE$ 的体积等于 $V_1 + V_2$.

由(1)知 $EA \perp \text{面 } ABC, ED \perp \text{面 } DBC$, 而 $DO = EA = 2$, $ED = AO = \sqrt{3}$, 故

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot EA = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{\triangle DBC} \cdot ED = \frac{1}{6} BC \cdot DO \cdot ED = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

从而 $V_1 + V_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 即多面体 $ABCDE$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$



19.解.(1) $f(x) = 1 - \cos 2\omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x = 2 \sin(2\omega x - \frac{\pi}{6}) + 1 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\because$ 图象关于直线 $x = \pi$ 对称, $\therefore 2\pi\omega - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \therefore \omega = \frac{k}{2} + \frac{1}{3} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又 $\omega \in (\frac{1}{2}, 1)$, 当 $k=1$ 时 $\omega = \frac{5}{6}$ 符合要求. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

故所求函数为 $f(x) = 2 \sin(\frac{5}{3}x - \frac{\pi}{6}) + 1. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2)由条件, $2 \sin(\frac{5}{3}A - \frac{\pi}{6}) + 1 = 3 \Rightarrow \sin(\frac{5}{3}A - \frac{\pi}{6}) = 1,$

又 $\frac{5}{3}A - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$, $\therefore \frac{5}{3}A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{2\pi}{5}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

再由 $B = 2C$, 得 $B = \frac{2\pi}{5}, C = \frac{\pi}{5}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

故 $A = 2C$, 从而由正弦定理和余弦定理,

$$\frac{a}{c} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = \frac{\sin A}{\sin C} - 2 \cos C = \frac{\sin 2C}{\sin C} - 2 \cos C = 0. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20.解(1)由 Γ 焦点在 y 轴上可设其方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2 - 3} = 1 (a > \sqrt{3}), \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

将 $B(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ 代入可得 $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{4(a^2 - 3)} = 1$, 解得 $a^2 = 4 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

故 Γ 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2)显然 AM, AN 的斜率均存在, 设 $AM: y = k(x-1) (k > 0)$,

与椭圆的方程联立可得 $(4+k^2)x^2 - 2k^2x + k^2 - 4 = 0$,5 分

由其一根为 1 可解出另一根 $x_M = \frac{k^2-4}{k^2+4}$, 由此可得 M 的坐标为 $(\frac{k^2-4}{k^2+4}, \frac{-8k}{k^2+4})$,7 分

且 $|AM| = \sqrt{k^2+1} \cdot |x_M - 1| = \frac{8\sqrt{k^2+1}}{k^2+4}$8 分

又 $AM \perp AN$, 故同理可得 N 的坐标为 $(\frac{1-4k^2}{1+4k^2}, \frac{8k}{1+4k^2})$, 且 $|AN| = \frac{8k\sqrt{k^2+1}}{1+4k^2}$ 10 分

由 $|AM| = |AN|$ 得 $k^3 + 4k = 4k^2 + 1$, 则 $(k-1)(k^2 - 3k + 1) = 0$,11 分

解得 $k = 1$ 或 $k = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$12 分

21. 解. (1) 若 $a = 2$, 则 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 20x - 16\ln x - 8$, 定义域为 $(0, +\infty)$.

$\therefore f'(x) = x^2 - 8x + 20 - \frac{16}{x} = \frac{(x-2)^2(x-4)}{x}$,2 分

故当 $x \in (0, 4)$ 时, $f'(x) \leq 0$; 当 $x \in (4, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 4]$, 单调递增区间为 $[4, +\infty)$. (写成开区间亦可)

.....4 分

(2) $f(2) = \frac{20}{3} + (6 - 8\ln 2)a$, $f(4) = \frac{16}{3} + (12 - 16\ln 2)a$. 令 $f(2) = f(4)$,

得 $\frac{20}{3} + (6 - 8\ln 2)a = \frac{16}{3} + (12 - 16\ln 2)a \Rightarrow a = \frac{2}{3(3 - 4\ln 2)}$6 分

由条件, $2 < \frac{2}{3(3 - 4\ln 2)} < 4$,

即 $2 < a < 4$7 分

再由 $f'(x) = x^2 - (6+a)x + (8+6a) - \frac{8a}{x} = \frac{(x-2)(x-4)(x-a)}{x}$9 分

知 $f(x)$ 在 $(0, 2]$ 和 $[a, 4]$ 单调递减, 在 $[2, a]$ 和 $[4, +\infty)$ 单调递增,

故 $f(x)$ 恰有两个极小值点 $x = 2$ 和 $x = 4$,11 分

从而 $f(x)$ 的最小值为 $\min\{f(2), f(4)\} = \frac{20}{3} + (6 - 8\ln 2)a = 8$12 分

22.解.(1)曲线 C 的普通方程为 $(x-\sqrt{3})^2 + (y-2)^2 = 4$,

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 4y + 3 = 0, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

又 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 代入上式得曲线 C 的极坐标方程为

$$\rho^2 - 2\sqrt{3}\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 3 = 0. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2)设 $P(\rho_1, \theta), Q(\rho_2, \theta)$, 将 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 代入 $\rho^2 - 2\sqrt{3}\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 3 = 0$, 化简得

$$\rho^2 - 5\rho + 3 = 0, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

所以 $\rho_1 \rho_2 = 3$, 故 $|OP||OQ| = 3$. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}

注：解法很多, 结论正确的都算对, 可酌情给分.

23.解.(1)当 $m=1$ 时, 不等式化为 $|x-1| - |2x+2| \geq 1$, 由零点分段法得

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x+3 \geq 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -3x-1 \geq 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ -x-3 \geq 1 \end{cases}, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

解得 $-2 \leq x \leq -\frac{2}{3}$, 所以原不等式的解集为 $[-2, -\frac{2}{3}]$. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}

(2)条件等价于对每个 $x \in \mathbf{R}, \exists t \in \mathbf{R}$ 使得 $f(x) < |t+1| - |t-1| = g(t)$.

$$\because f(x) = \begin{cases} x+3m, & x \leq -m \\ -3x-m, & -m < x < m \\ -x-3m, & x \geq m \end{cases}, \text{易知 } f(x) \text{ 有最大值 } f(-m) = 2m, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

又 $g(t) \leq |(t+1) - (t-1)| = 2$, 取等条件是 $t \geq 1$, 故 $g(t)$ 的最大值为 2, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}

于是问题转化为 $2m < 2$, 解得 $0 < m < 1$. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}