

成都七中高三数学高考模拟考试(理科)参考答案

一、选择题：CDDC BDDA BBAC

12.解.显然 A 在左支上 B 在右支上. 设 e, c 分别为双曲线的离心率和半焦距, M 为 AB 中点,

设 $\angle AF_1O = \theta$, 再设 A_1, B_1 分别是 A, B 在左准线上的射影, 则

$$\cos \theta = \frac{|BB_1| + |AA_1|}{|AB|} = \frac{|BF_1| + |AF_1|}{e(|BF_1| - |AF_1|)} = \frac{2}{e} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{e^2 - 4}}{2}.$$

$$k_{AB} k_{OM} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow k_{OM} \tan \theta = e^2 - 1, \text{ 故 } k_{OM} = \frac{2(e^2 - 1)}{\sqrt{e^2 - 4}} = 2(\sqrt{e^2 - 4} + \frac{3}{\sqrt{e^2 - 4}}) \geq 4\sqrt{3},$$

取等条件是 $e = \sqrt{7}$. 故选 C. (注: 应该有可以不用准线的解法)

二、填空题: -1; 0; 5; $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

三、解答题

17.解.(1)记“抽取的两天销售量都小于 30 件”为事件 A , 则 $P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$3 分

(2)(i) 设乙商家的日销售量为 a 件, 则当 $a = 28$ 时, $X = 28 \times 5 = 140$; 相仿地, 当 $a = 29$ 时, $X = 145$; 当 $a = 30$ 时, $X = 150$; 而当 $a = 31$ 时, $X = 30 \times 5 + 1 \times 10 = 160$.

所以 X 的所有可能取值的集合为 $\{140, 145, 150, 160\}$,5 分

利用茎叶图易得 X 的分布列为

X	140	145	150	160
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$

.....7 分

故所以 $E(X) = \frac{1}{10} \times 140 + \frac{1}{5} \times 145 + \frac{1}{5} \times 150 + \frac{1}{2} \times 160 = 153$ (元).8 分

(ii) 依题意, 甲商家的日平均销售量为 $28 \times 0.2 + 29 \times 0.4 + 30 \times 0.2 + 31 \times 0.2 = 29.4$. 所以甲商家的日平均返利额为 $60 + 29.4 \times 3 = 148.2$ 元.10 分

再由(i)知乙商家的日平均返利额为 153 元.

由于 153 元 > 148.2 元, 故应推荐该超市选择乙商家长期销售.12 分

18.解.(1)证明: 取 BC 中点 O , 连结 AO, DO .

$$\because BD = CD = \sqrt{5}, \therefore DO \perp BC, \text{ 且 } DO = \sqrt{CD^2 - OC^2} = 2.$$

再由平面 BCD 与平面 ABC 垂直, $DO \subset$ 平面 BCD 且 $DO \perp BC$ 知 $DO \perp$ 平面 ABC 2 分

$\because AE \perp$ 平面 $ABC, \therefore AE \parallel DO$.

又 $DO = 2 = AE, \therefore$ 四边形 $AODE$ 是平行四边形, 故 $ED \parallel AO$.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AO \perp BC$,

$\because AO \subset$ 平面 ABC , 平面 $BCD \cap$ 平面 $ABC = BC$, 平面 $BCD \perp$ 平面 ABC ,4 分

$\therefore AO \perp$ 平面 $BCD, \therefore ED \perp$ 平面 BCD ,

$\because ED \subset$ 平面 $EBD, \therefore$ 平面 $EBD \perp$ 平面 BCD6 分

(2)由(1)得 $AO \perp$ 平面 BCD , $\therefore AO \perp DO$. 又 $DO \perp BC$, $AO \perp BC$, 分别以 OB , AO , OD 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 则 $A(0, -\sqrt{3}, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 0, 2)$,

$E(0, -\sqrt{3}, 2)$, $\overrightarrow{BD} = (-1, 0, 2)$, $\overrightarrow{BE} = (-1, -\sqrt{3}, 2)$ 8 分

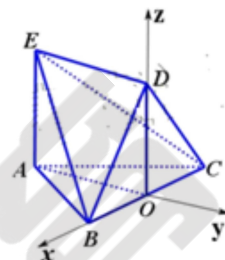
平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$, 设平面 BED 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -x + 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = -x - \sqrt{3}y + 2z = 0 \end{cases}, \text{取 } x = 2, \text{得 } \vec{n} = (2, 0, 1) \text{ 10 分}$$

设平面 BED 与平面 ABC 所成锐二面角的平面角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 11 分}$$

$\therefore$ 平面 BED 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 12 分



19.解.(1) $f(x) = 1 - \cos 2\omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x = 2 \sin(2\omega x - \frac{\pi}{6}) + 1$ 2 分

$\because$ 图象关于直线 $x = \pi$ 对称, $\therefore 2\pi\omega - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \therefore \omega = \frac{k}{2} + \frac{1}{6}$ 4 分

又 $\omega \in (\frac{1}{2}, 1)$, 当 $k = 1$ 时 $\omega = \frac{5}{6}$ 符合要求. 5 分

故所求函数为 $f(x) = 2 \sin(\frac{5}{3}x - \frac{\pi}{6}) + 1$ 6 分

(2)由条件, $2 \sin(\frac{5}{3}A - \frac{\pi}{6}) + 1 = 3 \Rightarrow \sin(\frac{5}{3}A - \frac{\pi}{6}) = 1$,

又 $\frac{5}{3}A - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$, $\therefore \frac{5}{3}A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{2\pi}{5}$, 8 分

再由 $B = 2C$, 得 $B = \frac{2\pi}{5}, C = \frac{\pi}{5}$, 9 分

故 $\sin C = \sin 4C$ 且 $A = 2C$,

故 $\cos A \cos C \sin C = \cos 2C \cos C \sin C = \frac{1}{4} \sin 4C \Rightarrow \cos A \cos C = \frac{1}{4}$ 12 分

20.解(1)由 Γ 焦点在 y 轴上可设其方程为 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2 - 3} = 1 (a > \sqrt{3})$, 1 分

将 $B(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ 代入可得 $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{4(a^2 - 3)} = 1$, 解得 $a^2 = 4$ 2 分

故 Γ 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 3 分

(2)显然 AM, AN 的斜率均存在, 设 $AM: y = k(x - 1) (k > 0)$, 与椭圆的方程联立可得

$(4+k^2)x^2-2k^2x+k^2-4=0$, 由其一根为 1 可解出另一根 $x_M = \frac{k^2-4}{k^2+4}$, 由此可得 M 的坐标为

$$\left(\frac{k^2-4}{k^2+4}, \frac{-8k}{k^2+4}\right), \text{ 且 } |AM| = \sqrt{k^2+1} \cdot |x_M - 1| = \frac{8\sqrt{k^2+1}}{k^2+4}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

又 $AM \perp AN$, 故同理可得 N 的坐标为 $\left(\frac{1-4k^2}{1+4k^2}, \frac{8k}{1+4k^2}\right)$, 且 $|AN| = \frac{8k\sqrt{k^2+1}}{1+4k^2} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

①由 $|AM| = |AN|$ 得 $k^3+4k=4k^2+1$, 则 $(k-1)(k^2-3k+1)=0$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

解得 $k=1$ 或 $k = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

②由前所述, 有 $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}|AM| \cdot |AN| = \frac{32k(k^2+1)}{(k^2+4)(1+4k^2)} = \frac{32k(k^2+1)}{4(k^2+1)^2+9k^2}$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

令 $h = \frac{k^2+1}{k} \in [2, +\infty)$, 则 $\frac{1}{S_{\triangle AMN}} = \frac{1}{32} \left(4h + \frac{9}{h}\right) = \varphi(h)$ 在 $[2, +\infty)$ 单调递增,

故有最小值 $h(2) = \frac{25}{64}$, 从而 $\triangle AMN$ 面积的最大值为 $\frac{64}{25}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

注: $32k(k^2+1) = \frac{8}{3} \cdot 2 \cdot 3k \cdot 2(k^2+1) \leq \frac{8}{3} [(3k)^2 + 4(k^2+1)^2] = \frac{8}{3} (4k^2+1)(k^2+4)$ 但取等条件

$3k = 2(k^2+1)$ 无实解.

21. 解. (1) 若 $a=2$, 则 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 20x - 16\ln x - 8$, 定义域为 $(0, +\infty)$.

$$\therefore f'(x) = x^2 - 8x + 20 - \frac{16}{x} = \frac{(x-2)^2(x-4)}{x}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

故当 $x \in (0, 4)$ 时, $f'(x) \leq 0$; 当 $x \in (4, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 4]$, 单调递增区间为 $[4, +\infty)$. (写成开区间亦可) $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) $f(2) = \frac{20}{3} + (6-8\ln 2)a$, $f(4) = \frac{16}{3} + (12-16\ln 2)a$. 令 $f(2) = f(4)$,

$$\text{得 } \frac{20}{3} + (6-8\ln 2)a = \frac{16}{3} + (12-16\ln 2)a \Rightarrow a = \frac{2}{3(3-4\ln 2)}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

条件 $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$ 等价于 $\frac{1}{6} < 3-4\ln 2 < \frac{1}{3}$, 等价于 $2 < \frac{2}{3(3-4\ln 2)} < 4$,

即 $2 < a < 4$8 分

再由 $f'(x) = x^2 - (6+a)x + (8+6a) - \frac{8a}{x} = \frac{(x-2)(x-4)(x-a)}{x}$9 分

知 $f(x)$ 在 $(0, 2]$ 和 $[a, 4]$ 单调递减, 在 $[2, a]$ 和 $[4, +\infty)$ 单调递增, 故 $f(x)$ 恰有两个极小值点 $x = 2$ 和 $x = 4$,

从而 $f(x)$ 的最小值为 $f(2) = f(4) = \frac{20}{3} + (6 - 8\ln 2)a = 8$11 分

故不等式 $f(x) \leq 8$ 的解集是 $\{2, 4\}$12 分

22. 解. (1) 曲线 C 的普通方程为 $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 2)^2 = 4$,

即 $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 4y + 3 = 0$,2 分

又 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 代入上式得曲线 C 的极坐标方程为

$\rho^2 - 2\sqrt{3}\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 3 = 0$5 分

(2) 设 $P(\rho_1, \theta), Q(\rho_2, \theta)$, 将 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 代入 $\rho^2 - 2\sqrt{3}\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 3 = 0$, 化简得

$\rho^2 - 5\rho + 3 = 0$,8 分

所以 $\rho_1 \rho_2 = 3$, 故 $|OP| \cdot |OQ| = 3$10 分

注：解法很多, 结论正确的都算对, 可酌情给分.

23. 解. (1) 当 $m = 1$ 时, 不等式化为 $|x - 1| - |2x + 2| \geq 1$, 由零点分段法得

$\begin{cases} x \leq -1 \\ x + 3 \geq 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -3x - 1 \geq 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 1 \\ -x - 3 \geq 1 \end{cases}$,3 分

解得 $-2 \leq x \leq -\frac{2}{3}$, 所以原不等式的解集为 $[-2, -\frac{2}{3}]$5 分

(2) 条件等价于对每个 $x \in R, \exists t \in R$ 使得 $f(x) < |t + 1| - |t - 1| = g(t)$.

$\therefore f(x) = \begin{cases} x + 3m, & x \leq -m \\ -3x - m, & -m < x < m \\ -x - 3m, & x \geq m \end{cases}$, 易知 $f(x)$ 有最大值 $f(-m) = 2m$,7 分

又 $g(t) \leq |(t + 1) - (t - 1)| = 2$, 取等条件是 $t \geq 1$, 故 $g(t)$ 的最大值为 2,9 分

于是问题转化为 $2m < 2$, 解得 $0 < m < 1$10 分