

绵阳南山中学 2023 年高考仿真考试数学试题(文科)

命题人：董文宝

审题人：赵义廉

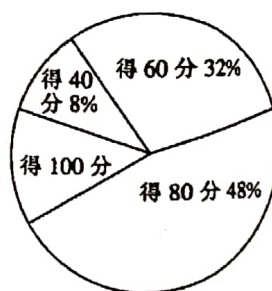
注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

第I卷(选择题，共 60 分)

一、单项选择题(本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。)

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 1, 2\}$, $B = \{x | (x+3)(1-x) < 0\}$ 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{-2, -1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 1\}$ D. $\{2\}$
2. 已知 $zi = 3 - i$ (i 为虚数单位), 则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于 ()
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 若向量 $\vec{a} = (x, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 且 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a}| =$ ()
 A. 1 B. 5 C. $\sqrt{29}$ D. $\sqrt{5}$
4. 不等式“ $\log_3 x > 1$ ”是“ $2^x > 1$ ”成立的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 某高中为了解学生课外知识的积累情况，随机抽取 200 名同学参加课外知识测试，测试共 5 道题，每答对一题得 20 分，答错得 0 分。已知每名同学至少能答对 2 道题，得分不少于 60 分记为及格，不少于 80 分记为优秀，测试成绩百分比分布图如图所示，则下列说法正确的是 ()
 A. 该次课外知识测试及格率为 90%
 B. 该次课外知识测试得满分的同学有 30 名
 C. 该次测试成绩的中位数大于测试成绩的平均数
 D. 若该校共有 3000 名学生，则课外知识测试成绩能得优秀的同学大约有 1440 名
6. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{5}$, $\cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
 A. $\frac{5}{2}$ B. 5 C. 10 D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$



7. 若曲线 $y = \ln x$ 上恰有三个不同的点到直线 $y = x + a$ 的距离为 $\sqrt{2}$ ，则实数 a 的值为 ()

- A. -3 B. $-2\sqrt{2}$ C. 1 D. -3 或 1

8. 记函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 T , 若 $f(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的一个零点, 则 ω 的最小值为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. 3 C. 6 D. $\frac{15}{2}$

9. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 以 F 为顶点的射线依次与抛物线 C 以及 y 轴交于 M ,

N 两点. 若 $|FM| = \frac{3}{2}$, 则 $\frac{|FM|}{|FN|} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

10. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(x+1)$ 是偶函数, 则满足 $f(2x) < f(x+2)$ 的 x 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -\frac{2}{3})$ B. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ C. $(0, 2)$ D. $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$

11. 掷铁饼是一项体育竞技活动. 如图 1, 这是一位掷铁饼运动员在准备掷出铁饼的瞬间, 张开的双臂及肩部近似看成一张拉满弦的“弓”. 其大致示意图如图 2, 经测量, 此时两手掌心之间的弧 $\widehat{AB}$ 长是 $\frac{7\pi}{10}$, “弓”所在圆的半径 ($OA = OB$) 为 1.05 米, 则这位掷铁饼运动员两手掌心 AB 之间的距离约为 (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$) ()



图 1

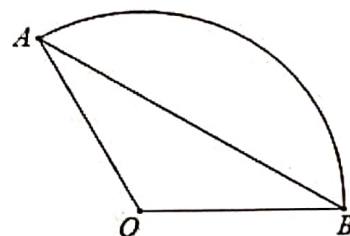
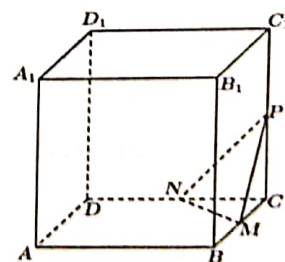


图 2

- A. 1.945 米 B. 1.485 米 C. 1.649 米 D. 1.819 米

12. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P, M, N 分别为棱 CC_1, CB, CD 上的动点 (点 P 不与点 C, C_1 重合), 若 $CP = CM = CN$, 则下列说法正确的个数是 ()

①存在点 P , 使得点 A_1 到平面 PMN 的距离为 $\frac{4}{3}$



②直线 MN 与 AD_1 所成角必为 $\frac{\pi}{3}$

③ $BD_1 \parallel$ 平面 PMN

④用平行于平面 PMN 的平面 α 去截正方体，得到的截面为六边形时，该六边形周长一定为 $3\sqrt{2}$

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

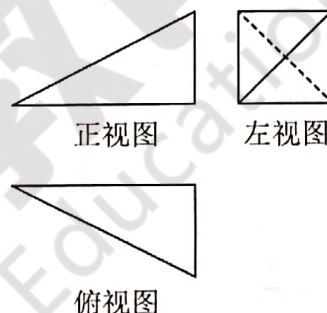
第II卷(非选择题，共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.)

13. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的离心率为 2，则右焦点 F_2 到其渐近线的距离为_____.

14. 连续掷骰子两次得到的点数分别记为 a 和 b ，则使直线 $x - 2y = 0$ 与圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 5$ 相交的概率为_____.

15. 一个几何体的三视图如图所示，其中正视图和俯视图是直角边长分别为 2 和 4 的两个全等的直角三角形，则这个几何体的外接球的表面积为_____.



16. 若函数 $f(x) = ae^x - \frac{1}{2}x^2 (a \in \mathbf{R})$ 有两个极值点 x_1, x_2 ，且 $\frac{x_2}{x_1} \geq 2$ ，

则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.)

(一) 必考题：共 60 分.

17. (本小题 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = 2a_n + 2n - 6 (n \in \mathbf{N}^*)$.

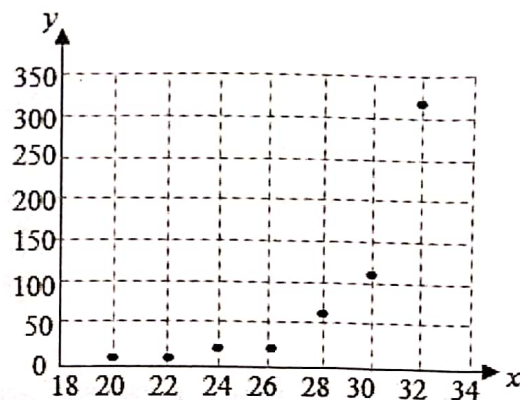
(I) 求证：数列 $\{a_n - 2\}$ 为等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ；

(II) 若 $a_1 - 1$ 和 $a_3 + 1$ 分别是等差数列 $\{b_n\}$ 的第二项和第六项，求数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题 12 分)

为了研究一种昆虫的产卵数 y 和温度 x 是否有关，现收集了 7 组观测数据列于下表中，并做出了散点图，发现样本点并没有分布在某个带状区域内，两个变量并不呈现线性相关关系，现分别用模型

① $y = C_1 x^2 + C_2$ 与模型② $y = e^{C_3 x + C_4}$ 作为产卵数 y 和温度 x 的回归方程来建立两个变量之间的关系.



温度 $x/^\circ\text{C}$	20	22	24	26	28	30	32
产卵数 $y/\text{个}$	6	10	21	24	64	113	322
$t = x^2$	400	484	576	676	784	900	1024
$z = \ln y$	1.79	2.30	3.04	3.18	4.16	4.73	5.77

$\bar{x}$	$\bar{t}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
26	692	80	3.57
$\frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2}$	$\frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2}$	$\frac{\sum_{i=1}^7 (z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2}$	$\frac{\sum_{i=1}^7 (z_i - \bar{z})(t_i - \bar{t})}{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2}$
1157.54	0.43	0.32	0.00012

其中 $t_i = x_i^2$, $\bar{t} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 t_i$, $z_i = \ln y_i$, $\bar{z} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 z_i$.

附：对于一组数据 $(\mu_1, \nu_1), (\mu_2, \nu_2), \dots, (\mu_n, \nu_n)$ ，其回归直线 $\nu = \beta\mu + \alpha$ 的斜率和截距的最小二乘估计

分别为： $\beta = \frac{\sum_{i=1}^n (\mu_i - \bar{\mu})(\nu_i - \bar{\nu})}{\sum_{i=1}^n (\mu_i - \bar{\mu})^2}$, $\alpha = \bar{\nu} - \beta\bar{\mu}$.

(I) 根据表中数据，模型①、②的相关指数计算分别为 $R_1^2 = 0.82$, $R_2^2 = 0.96$ ，请根据相关指数判断哪个模型的拟合效果更好；

(II) 根据 (I) 中的判断，在拟合效果更好的模型下求 y 关于 x 的回归方程；并估计温度为 30°C 时的产卵数. (C_1, C_2, C_3, C_4 与估计值均精确到小数点后两位)

(参考数据： $e^{4.65} \approx 104.58$, $e^{4.85} \approx 127.74$, $e^{5.05} \approx 156.02$)

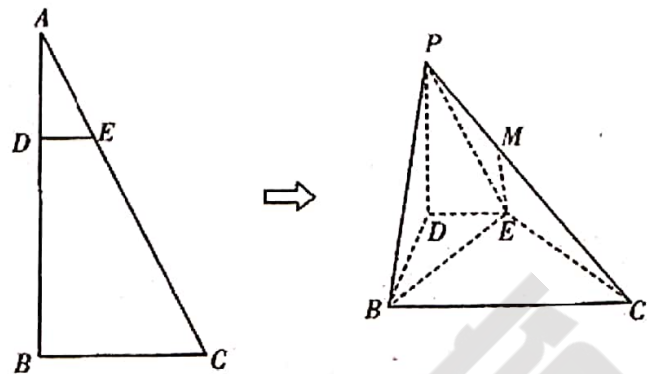
19. (本小题 12 分)

如图所示，在直角三角形 ABC 中， $\angle ABC = 90^\circ$, $DE \parallel BC$, $BD = 2AD = 4$, $DE = 1$ ，将

$\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle PDE$ 的位置，使平面 $PDE \perp$ 平面 $BCED$ ，点 M 满足 $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MP}$ 。

(I) 证明： $BC \perp ME$ ；

(II) 求点 M 到平面 PBE 的距离。



20. (本小题 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 四个顶点围成的四边形为菱形，它的边长为 $\sqrt{7}$ ，面积为 $4\sqrt{3}$ ，过椭圆左焦点 F_1 与椭圆 C 相交于 M, N 两点 (M, N 两点不在 x 轴上)，直线 l 的方程为： $x = -4$ ，过点 M 作 ME 垂直于直线 l 交于点 E 。

(I) 求椭圆 C 的标准方程；

(II) 点 O 为坐标原点，求 $\triangle OEN$ 面积的最大值。

21. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 - \sin x$ 。

(I) 若 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上为单调递减函数，求实数 a 的取值范围；

(II) 设函数 $g(x) = f(x) + x \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ，若 $g(x)$ 恰有 1 个零点，求实数 a 的取值范围。

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。并用 2B 铅笔将所选题号涂黑，多涂、错涂、漏涂均不给分。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的直角坐标方程为 $x - 7y + 8 = 0$ ，曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数}), \text{ 以坐标原点为极点, } x \text{ 轴非负半轴为极轴建立极坐标系.}$$

(I) 求直线 l 和曲线 C 的极坐标方程;

(II) 设直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点, 求 $\angle AOB$ 的大小.

23. [选修 4—5：不等式选讲] (10 分)

已知 a, b, c 为实数, 且 $a + 2b + 5c = 10$.

(I) 若 a, b, c 均为正数, 当 $\sqrt{2ab} + \sqrt{5ac} + \sqrt{10bc} = 10$ 时, 求 $a + b + c$ 的值;

(II) 求 $(2b + 5c)^2 + (a + b + 5c)^2 + (a + 2b + 4c)^2$ 的最小值.