

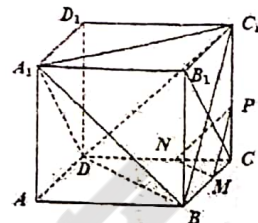
绵阳南山中学 2023 年高考仿真考试数学试题(文科)

参考答案

一、单项选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

DBDAC AABAC DC

12. 【详解】①. 连接 $A_1C_1, BC_1, A_1B, BD, C_1D, A_1D, B_1C$ ，如图所示：



因为 $CP = CM = CN$ ，所以易知 $MN \parallel BD, NP \parallel C_1D, MP \parallel BC_1$ ，

且平面 $MNP \parallel$ 平面 BC_1D ，

又已知三棱锥 $A_1 - BC_1D$ 各条棱长均为 $\sqrt{2}$ ，所以三棱锥 $A_1 - BC_1D$ 为正四面体，

所以 A_1 到平面 BC_1D 的距离为：
$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

因为 $A_1B_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，所以 $A_1B_1 \perp BC_1$ ，又 $BC_1 \perp B_1C$ ，且 $A_1B_1 \cap B_1C = B_1$ ，

所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1C ，又 $A_1C \subset$ 平面 A_1B_1C ，所以 $BC_1 \perp A_1C$ ，

同理可得 $C_1D \perp A_1C$ ，且 $BC_1 \cap C_1D = C_1$ ，所以 $A_1C \perp$ 平面 BC_1D ，

又因为 $A_1C = \sqrt{3}$ ，所以 A_1 到平面 PMN 的距离 $\in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$ ，且 $\frac{2\sqrt{3}}{3} < \frac{4}{3} < \sqrt{3}$ ，故正确；

②. 正确；

③. 连接 BD_1 ，由 A 可知平面 $MNP \parallel$ 平面 BC_1D ，

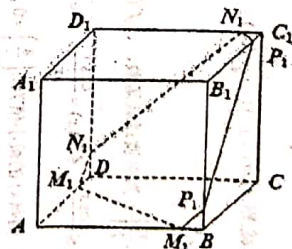
又因为 $B \in$ 平面 BC_1D ， $D_1 \notin$ 平面 BC_1D ，所以 BD_1 不平行于平面 BC_1D ，所以 $BD_1 \parallel$ 平面 PMN 不成立，故错误；

④. 在 BB_1 上取点 P_1 ，过点 P_1 作 $P_1P_2 \parallel MP$ 交 B_1C_1 于 P_2 ，过 P_2 作 $P_2N_1 \parallel MN$ 交 C_1D_1 于 N_1 ，以此类推，依次可得点 N_2, M_1, M_2 ，此时截面为六边形，根据题意可知：

平面 $P_1P_2N_1N_2M_1M_2 \parallel$ 平面 MNP ，不妨设 $BP_1 = x$ ，所以

$P_1M_2 = P_2N_1 = N_2M_1 = \sqrt{2}x$ ，所以 $P_1P_2 = N_1N_2 = M_1M_2 = \sqrt{2}(1-x)$ ，

所以六边形的周长为：
$$3[\sqrt{2}x + \sqrt{2}(1-x)] = 3\sqrt{2}$$
，故正确；



二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\sqrt{3}$

14. $\frac{7}{12}$

15. 24π

16. $(0, \frac{1}{2} \ln 2]$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(1) 因为 $S_n = 2a_n + 2n - 6$ ，所以当 $n=1$ 时， $S_1 = 2a_1 - 4$ ，解得 $a_1 = 4$ 。

当 $n \geq 2$ 时， $S_{n-1} = 2a_{n-1} + 2n - 8$ ，则 $S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} + 2$ ，

整理得 $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ，

故 $\frac{a_n - 2}{a_{n-1} - 2} = 2$ ，

所以数列 $\{a_n - 2\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列；

所以 $a_n - 2 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ ，所以 $a_n = 2^n + 2$ 。

(2) $b_n = 2n - 1$ ， $\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$ 。

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2n+1}) = \frac{n}{2n+1}$ 。

18. 解：(1) 因为 $R_1^2 < R_2^2$ ，所以模型②的拟合效果更好。

(2) 由 (1) 知模型②的拟合效果更好，

对于模型②：设 $z = \ln y$ ，则 $\ln y = C_3 x + C_4$ ，

其中 $C_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 0.32$ ，

$C_4 = \bar{z} - C_3 \bar{x} = 3.57 - 0.32 \times 26 = -4.75$ 。

所以 y 关于 x 的回归方程为 $y = e^{0.32x - 4.75}$ ，

当 $x = 30$ 时，估计产卵数为 $y_2 = e^{0.32 \times 30 - 4.75} = e^{4.85} \approx 127.74$ 。

19. 解析 (1) 在直角三角形 ABC 中，因为 $DE \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ，所以 $DE \perp AB$ ，

即在四棱锥 $P-DBCE$ 中， $DE \perp PD$ ， $DE \perp BD$ ， $PD \cap BD = D$ ，

所以 $DE \perp$ 平面 PDB ，从而 $BC \perp$ 平面 PDB 。

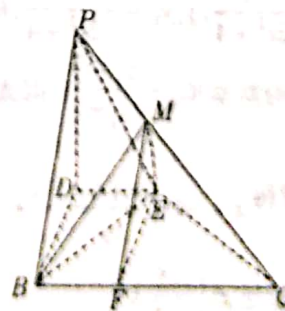
如图，在 BC 上取一点 F ，使得 $CF = 2BF$ ，连接 EF ， MF 。

因为 $BD = 2AD$ ，所以 $BC = 3DE = 3$ ，所以 $BF = 1 = DE$ ，

又 $BF \parallel DE$ ，所以四边形 $BFED$ 是矩形，所以 $BD \parallel EF$ 。

在 $\triangle PBC$ 中， $CM = 2MP$ ， $CF = 2BF$ ，所以 $MF \parallel PB$ 。

又因为 $BD \cap PB = B$ ， $EF \cap MF = F$ ，所以平面 $PBD \parallel$ 平面 MEF 。



所以 $BC \perp$ 平面 MEF ，故 $BC \perp ME$ 。

(2) 连接 BM ，因为平面 $PDE \perp$ 平面 $BCED$ ，交线为 DE ，且 $PD \perp DE$ ，

所以 $PD \perp$ 平面 $BCED$ 。

所以三棱锥 $P-BCE$ 的体积 $V_{P-BCE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} BC \times BD \times PD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 2 = 4$ 。

所以 $V_{M-PBE} = \frac{1}{3} V_{C-PBE} = \frac{1}{3} V_{P-BCE} = \frac{4}{3}$ 。

在 $\triangle PBE$ 中，计算可得 $PE = \sqrt{5}$ ， $PB = 2\sqrt{5}$ ， $BE = \sqrt{17}$ 。

由余弦定理得 $\cos \angle BPE = \frac{2}{5}$ ，所以 $\sin \angle BPE = \frac{\sqrt{21}}{5}$ 。

$S_{\triangle PBE} = \frac{1}{2} PE \times PB \sin \angle BPE = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} = \sqrt{21}$ 。

设点 M 到平面 PBE 的距离为 d ，则 $V_{M-PBE} = \frac{1}{3} S_{\triangle PBE} d$ ，

故 $d = \frac{3V_{M-PBE}}{S_{\triangle PBE}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}$ 。

20. 【解析】(1) 由题意可得： $\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7} \\ 2ab=4\sqrt{3} \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$

椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 由 (1) 可得： $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$ ，即 $F_1(-1, 0)$

由题意可设直线 $MN: x = ty - 1$ ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，则 $E(-4, y_1)$

联立方程 $\begin{cases} x=ty-1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ ，消去 x 可得： $(3t^2 + 4)y^2 - 6ty - 9 = 0$

$\therefore y_1 + y_2 = \frac{6t}{3t^2 + 4}$ ， $y_1 y_2 = -\frac{9}{3t^2 + 4}$ ，则 $ty_1 y_2 = -\frac{3}{2}(y_1 + y_2)$

$\therefore$ 直线 EN 的斜率 $k_{EN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 + 4}$ ，则直线 EN 的方程为 $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 + 4}(x + 4)$

令 $y=0$ ，则可得 $x = -4 - \frac{y_1(x_2 + 4)}{y_2 - y_1} = -4 - \frac{y_1(ty_2 + 3)}{y_2 - y_1} = -4 - \frac{ty_1 y_2 + 3y_1}{y_2 - y_1} = -4 - \frac{\frac{3}{2}(y_1 - y_2)}{y_2 - y_1} = -\frac{5}{2}$

即直线 EN 过定点 $(-\frac{5}{2}, 0)$

$\therefore \triangle OEN$ 面积为 $S = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times |y_1 - y_2| = \frac{5}{4} \sqrt{\left(\frac{6t}{3t^2 + 4}\right)^2 + \frac{36}{3t^2 + 4}} = \frac{15\sqrt{t^2 + 1}}{3(t^2 + 1) + 1}$

$$\text{令 } m = \sqrt{r^2 + 1} \geq 1, \text{ 则 } S = \frac{15m}{3m^2 + 1}$$

$$\text{令 } f(m) = \frac{15m}{3m^2 + 1} (m \geq 1), \text{ 则 } f'(m) = \frac{15(1 - 3m^2)}{(3m^2 + 1)^2} < 0 \text{ 当 } m \geq 1 \text{ 时恒成立}$$

$$\therefore f(m) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 单调递减, 则 } f(m) \leq f(1) = \frac{15}{4}, \text{ 即 } S \leq \frac{15}{4}$$

$$\therefore \triangle OEN \text{ 面积的最大值为 } \frac{15}{4}$$

21. 解: (1) $\because f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为单调递减函数, $\therefore f'(x) \leq 0$ 对任意 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立

$$\therefore 2ax - \cos x \leq 0, \text{ 则 } 2a \leq \frac{\cos x}{x}, \text{ 令 } h(x) = \frac{\cos x}{x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 则 } h'(x) = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} < 0,$$

$$\therefore h(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 单调减, 则 } h(x) \text{ 的最小值为 } h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\therefore 2a \leq 0, \text{ 即 } a \leq 0, \text{ 所以实数 } a \text{ 的取值范围是 } a \leq 0,$$

$$(2) \textcircled{1} g(x) = ax^2 + x \cos x - \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 所以 } g'(x) = x(2a - \sin x),$$

$$\text{当 } a \geq \frac{1}{2} \text{ 时, } 2a - \sin x \geq 0, \text{ 所以 } g(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 单调递增,}$$

$$\text{又因为 } g(0) = 0, \text{ 所以 } g(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上无零点.}$$

$$\text{当 } 0 < a < \frac{1}{2} \text{ 时, } \exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 使得 } \sin x_0 = 2a,$$

$$\text{当 } x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } g'(x) < 0, \text{ 当 } x \in (0, x_0) \text{ 时, } g'(x) > 0,$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 在 } \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 单调递减, 在 } (0, x_0) \text{ 单调递增, 又因为 } g(0) = 0, g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a\pi^2}{4} - 1,$$

$$\text{所以若 } \frac{a\pi^2}{4} - 1 > 0, \text{ 即 } a > \frac{4}{\pi^2} \text{ 时, } g(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上无零点,}$$

$$\text{若 } \frac{a\pi^2}{4} - 1 \leq 0, \text{ 即 } 0 < a \leq \frac{4}{\pi^2} \text{ 时, } g(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上有一个零点,}$$

$$\text{当 } a \leq 0 \text{ 时, } g'(x) = 2a - x \sin x < 0, g(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上单调递减且 } g(0) = 0,$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上无零点,}$$

$$\text{综上, } 0 < a \leq \frac{4}{\pi^2}$$

22. (1) 依题意, 把 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ 代入 $x - 7y + 8 = 0$,

得直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta - 7\rho \sin \theta + 8 = 0$;

把 $x^2 + y^2 = \rho^2$, $x = \rho \cos \theta$ 代入 $x^2 + y^2 - 4x = 0$,

得 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta = 0$, 即曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos \theta$

(2) 联立 $\rho \cos \theta - 7\rho \sin \theta + 8 = 0$ 和 $\rho = 4\cos \theta$,

得 $4\cos \theta \cos \theta - 28\cos \theta \sin \theta + 8 = 0$,

即 $\cos^3 \theta - 7\cos \theta \sin \theta + 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0$,

$3\cos^3 \theta - 7\cos \theta \sin \theta + 2\sin^2 \theta = 0$,

$2\tan^3 \theta - 7\tan \theta + 3 = 0$,

$(2\tan \theta - 1)(\tan \theta - 3) = 0$,

所以 $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 或 $\tan \theta = 3$,

即 A, B 两点对应的极角的正切值分别是 $\frac{1}{2}$ 和 3 ,

于是 $\tan \angle AOB = \left| \tan(\theta_A - \theta_B) \right| = \left| \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} \right| = 1$, 所以 $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$

23. (1) 解: (1) 由基本不等式得: $a + 2b \geq 2\sqrt{2ab}$, $a + 5c \geq 2\sqrt{5ac}$, $2b + 5c \geq 2\sqrt{10bc}$.

以上三个式子相加得 $2(a + 2b + 5c) \geq 2(\sqrt{2ab} + \sqrt{5ac} + \sqrt{10bc})$,

所以 $\sqrt{2ab} + \sqrt{5ac} + \sqrt{10bc} \leq 10$,

当且仅当 $\begin{cases} a = 2b = 5c \\ a + 2b + 5c = 10 \end{cases}$ 时等号成立, 此时 $a = \frac{10}{3}$, $b = \frac{5}{3}$, $c = \frac{2}{3}$, 所以 $a + b + c = \frac{17}{3}$.

(2) $(2b + 5c)^2 + (a + b + 5c)^2 + (a + 2b + 4c)^2 = (10 - a)^2 + (10 - b)^2 + (10 - c)^2$

$= [(a - 10)^2 + (b - 10)^2 + (c - 10)^2] \cdot (1^2 + 2^2 + 5^2) \cdot \frac{1}{30} \geq \frac{1}{30} [(a - 10) + 2(b - 10) + 5(c - 10)]^2$

$= \frac{1}{30} (a + 2b + 5c - 80)^2 = \frac{490}{3}$,

当且仅当 $a - 10 = \frac{b - 10}{2} = \frac{c - 10}{5}$ 即 $a = \frac{23}{3}$, $b = \frac{16}{3}$, $c = -\frac{5}{3}$ 时, 等号成立.