

2023 年 5 月

绵阳南山中学 2023 年高考仿真考试数学试题(理科)

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集 $A = \{-2, -1, 1, 2\}$, $B = \{x | x(x^2 + 2) < 0\}$ 则 $A \cap B =$ ()A. $\{-2, -1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 1\}$ D. $\{-2, -1, 2\}$ 2. 已知 $zi = 3 - i$ (i 为虚数单位), 则复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

3. 若向量 $\vec{a} = (x, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a}| =$ ()A. $2\sqrt{3}$

B. 4

C. $3\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{5}$ 4. 不等式“ $\log_3 x > 1$ ”是“ $2^x > 1$ ”成立的()

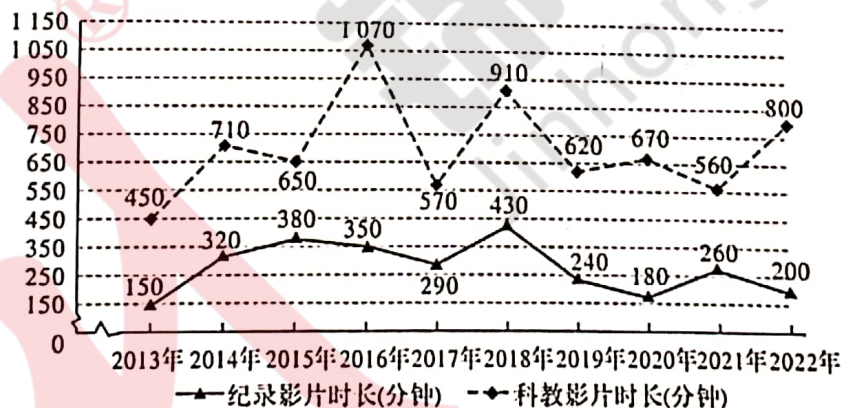
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 某电影制片厂从 2013 年至 2022 年生产的纪录影片、科教影片的时长(单位: 分钟)如图所示, 则()



A. 该电影制片厂 2013 年至 2022 年生产的纪录影片时长的中位数为 270 分钟

B. 该电影制片厂 2013 年至 2022 年生产的科教影片时长的平均数小于 660 分钟

C. 该电影制片厂 2013 年至 2022 年生产的科教影片时长的标准差大于纪录影片时长的标准差

D. 该电影制片厂 2013 年至 2022 年生产的科教影片时长的极差是纪录影片时长的极差的 4 倍

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{10}$, $\cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为()A. $\frac{5}{2}$

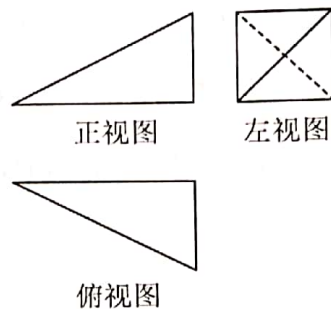
B. 5

C. 10

D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

7. 一个几何体的三视图如图所示,其中正视图和俯视图是直角边长分别为2和4的两个全等的直角三角形,

则这个几何体的外接球的表面积为()



A. $4\sqrt{6}\pi$

B. $8\sqrt{6}\pi$

C. 12π

D. 24π

8. 记函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 T , 若 $f(T) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点, 则 ω 的最小值为()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

9. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的两个焦点, 点 P 在 C 上, 则 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2$ 的取值范围是()

A. $[1, 16]$

B. $[4, 10]$

C. $[8, 10]$

D. $[8, 16]$

10. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(x+1)$ 是偶函数, 则满足 $f(2x) < f(x+2)$ 的 x 的取值范围为()

A. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$

B. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

C. $(0, 2)$

D. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$

11. 掷铁饼是一项体育竞技活动. 如图1, 这是一位掷铁饼运动员在准备掷出铁饼的瞬间, 张开的双臂及肩部近似看成一张拉满弦的“弓”. 其大致示意图如图2, 经测量, 此时两手掌心之间的弧 $\widehat{AB}$ 长是 $\frac{7\pi}{10}$, “弓”所在圆的半径 ($OA=OB$) 为1.05米, 则这位掷铁饼运动员两手掌心 AB 之间的距离约为(参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$) ()



图1

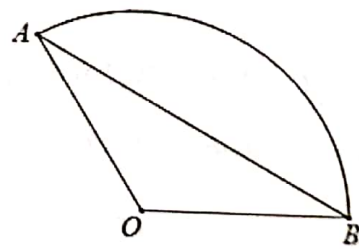


图2

A. 1.945米

B. 1.485米

C. 1.649米

D. 1.819米

12. 已知函数 $f(x) = ae^x - \frac{1}{2}x^2$ ($a \in \mathbb{R}$), 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $\frac{x_2}{x_1} \geq 2$, 则实数 a 的取值范围为()

A. $(0, \frac{1}{2}\ln 2]$

B. $(0, \ln 2]$

C. $(0, 2\ln 2]$

D. $(0, 3\ln 2]$

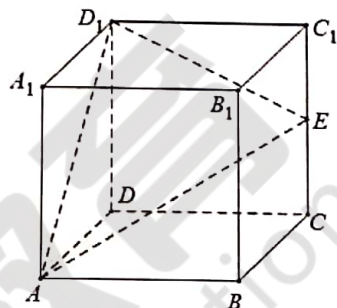
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(x - \frac{1}{x})^4$ 展开式的常数项是_____

14. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的离心率为 2，则右焦点 F_2 到其渐近线的距离为_____

15. 已知 $f(x) = ax^2 (a > 0)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线与函数 $g(x) = e^x$ 的图象也相切，则该切线的斜率 $k = \underline{\hspace{1cm}}$.

16. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 是棱 CC_1 的中点，记平面 AD_1E 与平面 $ABCD$ 的交线 l_1 ，平面 AD_1E 与平面 ABB_1A_1 的交线 l_2 ，若直线 AB 与 l_1 所成角为 α ，直线 AB 与 l_2 所成角为 β ，则 $\sin(2\alpha - \beta)$ 的值是_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (本小题 12 分)“体育强则国家强，国运兴则体育兴”，多参加体育运动能有效增强中学生的身体素质.篮球和排球是我校学生最为喜爱的两项运动，为调查喜爱运动项目与性别之间的关系，某调研组在校内随机采访男生、女生各 50 人，每人必须从篮球和排球中选择最喜爱的一项，其中喜爱排球的归为甲组，喜爱篮球的归为乙组，调查发现甲组成员 48 人，其中男生 18 人.

(1)根据以上数据，填空下述 2×2 列联表：

	甲组	乙组	合计
男生			
女生			
合计			

(2)根据以上数据，能否有 95% 的把握认为学生喜欢排球还是篮球与“性别”有关？

(3)现从调查的女生中按分层抽样的方法选出 5 人组成一个小组，抽取的 5 人中再随机抽取 3 人发放礼品，求这 3 人中在甲组中的人数 X 的概率分布列及其数学期望.

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$ 为样本容量.

参考数据：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.05	0.01
k_0	0.455	3.841	6.635

18. (本小题 12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 2a_n + 2n - 6 (n \in \mathbf{N}^*)$.

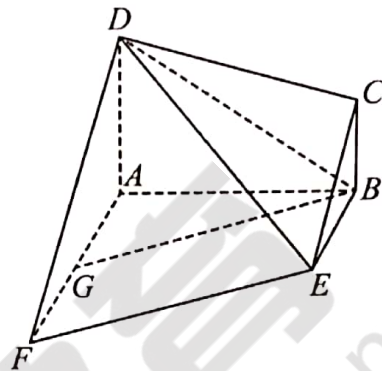
(1) 求证数列 $\{a_n - 2\}$ 为等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ；

(2) 若数列 $\left\{ \frac{2^{n+1}}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 m 项和 $T_m = \frac{127}{258}$ ，求 m 的值.

19. (本小题 12 分)如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 与 $ABEF$ 均为直角梯形, $AD \parallel BC$, $AF \parallel BE$, $DA \perp$ 平面 $ABEF$, $AB \perp AF$, $AD = AB = 2BC = 2BE = 2$.

(1) 已知点 G 为 AF 上一点, 且 $AG=2$, 求证: BG 与平面 DCE 不平行;

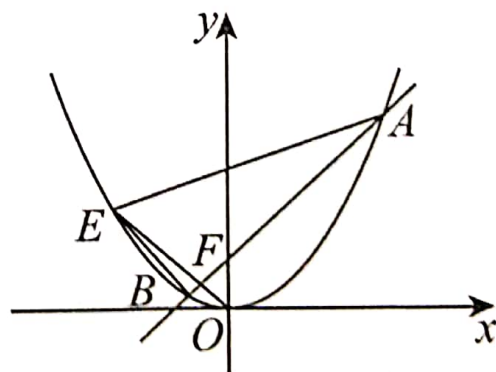
(2) 已知直线 BF 与平面 DCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 AF 的长及四棱锥 $D-ABEF$ 的体积.



20. (本小题 12 分)如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 $F(0, \frac{1}{2})$, 过点 F 的直线交 C 于 A, B 两点 (其中点 A 位于第一象限), 设点 E 是抛物线 C 上的一点, 且满足 $OE \perp OA$, 连接 EA, EB .

(1) 求抛物线 C 的标准方程及其准线方程;

(2) 记 $\triangle ABE$, $\triangle AOF$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 求 $S_1 S_2$ 的最小值及此时点 A 的坐标.



21. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = xe^x - e^x + a (a \in \mathbb{R})$, 且 $f(x) \geq 0$.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 已知 $n \in \mathbb{N}^*$, 证明: $\sin \frac{1}{n+1} + \sin \frac{1}{n+2} + \cdots + \sin \frac{1}{2n} < \ln 2$.

二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的直角坐标方程为 $x - 7y + 8 = 0$, 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 4x = 0$,

以坐标原点为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求直线 l 和曲线 C 的极坐标方程;

(2) 设直线 l 交曲线 C 于两点 A, B , 求 $\angle AOB$ 的大小.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

已知 a, b, c 均为正实数, 且 $abc = 1$.

(1) 求 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c}$ 的最小值;

(2) 证明: $bc + ac + ab \geq \frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+c} + \frac{2}{a+b}$.