

绵阳南山中学 2023 年高考仿真考试数学试题(理科)

参考答案及评分细则

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

ABDAC ADBCC DA

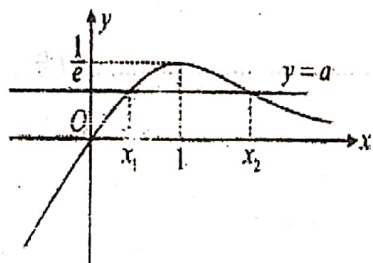
12. 解：\$f'(x) = ae^x - x\$，\$f(x)\$ 有两个极值点等价于 \$f'(x)\$ 有两个零点，

即方程 \$ae^x - x = 0\$ 有两个实根，也即方程 \$a = xe^{-x}\$ 有两个实根，

令 \$g(x) = xe^{-x} (x \in \mathbb{R})\$，则 \$g'(x) = (1-x)e^{-x}\$，所以 \$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1, g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1\$，

从而 \$g(x)\$ 在 \$(-\infty, 1)\$ 上 \$\nearrow\$，在 \$(1, +\infty)\$ 上 \$\searrow\$，易知 \$x \rightarrow -\infty\$ 时，\$g(x) \rightarrow -\infty\$，\$g(1) = \frac{1}{e}\$；\$x \rightarrow +\infty\$ 时，\$g(x) \rightarrow 0\$，

据此可作出函数 \$y = g(x)\$ 的图像如下：



首先，当且仅当 \$0 < a < \frac{1}{e}\$ 时，直线 \$y=a\$ 与函数 \$y=g(x)\$ 的图象有两个交点，

其次，由图可知 \$0 < x_1 < 1, x_2 > 1\$，且当 \$a \in (0, \frac{1}{e})\$ 时，\$\frac{x_2}{x_1}\$ 随 \$a\$ 的减小而增大，

不妨考虑 \$\frac{x_2}{x_1} = 2\$ 的情形，此时 \$x_2 = 2x_1\$，因为 \$g(x_1) = g(x_2) = a\$，所以 \$\begin{cases} a = x_1 e^{-x_1} \\ a = x_2 e^{-x_2} \end{cases}\$，

将 \$x_2 = 2x_1\$ 代入得：\$\begin{cases} a = x_1 e^{-x_1} \\ a = 2x_1 e^{-2x_1} \end{cases}\$，两式相除得：\$2e^{-x_1} = 1\$，故 \$x_1 = \ln 2\$，即 \$a = \ln 2 \times e^{-\ln 2} = \ln \sqrt{2}\$，

所以当且仅当 \$0 < a \leq \ln \sqrt{2}\$ 时，\$f(x)\$ 有两个极值点 \$x_1, x_2\$ 且 \$\frac{x_2}{x_1} \geq 2\$。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 6

14. \$\sqrt{3}\$

15. \$\frac{3}{e^2}\$

16. \$\frac{\sqrt{5}}{5}\$

6. 解：延长 \$D_1E\$ 与直线 \$CD\$ 相交于 \$F\$，连接 \$AF\$，

则平面 \$AD_1E\$ 与平面 \$ABCD\$ 的交线为 \$AF\$，

\$\because AB \parallel CD\$

\$\therefore \angle AFD = \alpha\$ 为平面 \$AD_1E\$ 与平面 \$ABCD\$ 的交线与直线 \$C_1D_1\$ 所成角，

$\because E$ 是棱 CC_1 的中点, 且 $DD_1 \parallel CC_1$,

$\therefore CD = CF$, $\therefore \tan \alpha = \frac{AD}{DF} = \frac{1}{2}$. 则 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

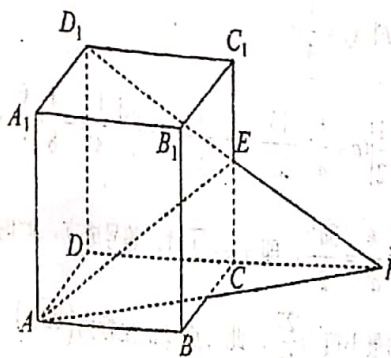
又 $\begin{cases} D_1E \parallel \text{平面 } A_1ABB_1 \\ D_1E \subset A_1DE \\ A_1DE \cap \text{平面 } A_1ABB_1 = l_2 \end{cases} \Rightarrow D_1E \parallel l_2$

又 $\because CD \parallel AB$

故直线 AB 与 l_2 所成角为 $\beta = \angle D_1FD$

又 $\triangle D_1FD \cong \triangle DFA$

故 $\alpha = \beta$, 所以 $\sin(2\alpha - \beta) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17. 解：(1) 2×2 列联表.....4 分

	甲组	乙组	合计
男生	18	32	50
女生	30	20	50
合计	48	52	100

(2) 零假设为 H_0 ：学生选排球还是篮球与性别无关

由 2×2 列联表可得

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100 \times (18 \times 20 - 30 \times 32)^2}{48 \times 52 \times 50 \times 50} \approx 5.769 > 3.841;$$

有 95% 的把握认为学生喜欢排球还是篮球与“性别”有关.....6 分

(3) 按分层抽样，甲组中女生 3 人，乙组中女生 2 人.....7 分

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{10}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_5^2} = \frac{1}{10} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$\therefore$ 概率分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 因为 $S_n = 2a_n + 2n - 6$, 所以当 $n=1$ 时, $S_1 = 2a_1 - 4$, 解得 $a_1 = 4$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} + 2n - 8$, 则 $S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1} + 2$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

整理得 $a_n = 2a_{n-1} - 2$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\text{故 } \frac{a_n - 2}{a_{n-1} - 2} = 2 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以数列 $\{a_n - 2\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列,

所以 $a_n - 2 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 所以 $a_n = 2^n + 2$ $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) b_n = \frac{2^{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{(2^n + 2)(2^{n+1} + 2)} = 2 \left(\frac{1}{2^n + 2} - \frac{1}{2^{n+1} + 2} \right) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } m \text{ 项和 } T_m = 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{2^m + 2} - \frac{1}{2^{m+1} + 2} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{m+1} + 2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{2^{m+1} + 2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \frac{1}{2} - \frac{2}{2^{m+1} + 2} = \frac{127}{258}, \text{ 则 } \frac{2}{2^{m+1} + 2} = \frac{2}{258}, \text{ 则 } 2^{m+1} = 256 \Rightarrow m = 7. \text{ 故 } m \text{ 的值为 } 7 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (1) 证明: 因为 $DA \perp$ 平面 $ABEF$, $AB, AF \subset$ 平面 $ABEF$, 所以 $DA \perp AB$, $DA \perp AF$, 又 $AB \perp AF$,

如图建立空间直角坐标系, 则 $B(0, 2, 0)$, $E(1, 2, 0)$, $C(0, 2, 1)$, $D(0, 0, 2)$, $G(2, 0, 0)$

$$\text{所以 } \overrightarrow{EC} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{ED} = (-1, -2, 2), \overrightarrow{BG} = (2, -2, 0),$$

$$\text{设平面 } DCE \text{ 的法向量为 } \vec{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EC} = -x + z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = -x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 则 } z = 2, y = 1, \text{ 所以 } \vec{n} = (2, 1, 2),$$

$$\text{因为 } \vec{n} \cdot \overrightarrow{BG} = 2 \times 2 + 1 \times (-2) = 2, \text{ 且不存在 } \lambda \text{ 使得 } \overrightarrow{BG} = \lambda \vec{n}, \text{ 即 } \overrightarrow{BG} \text{ 与 } \vec{n} \text{ 不共线,}$$

所以 BG 与平面 DCE 不平行且不垂直 $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 解: 设 } AF = a (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1), \text{ 则 } F(a, 0, 0), \text{ 所以 } \overrightarrow{BF} = (a, -2, 0),$$

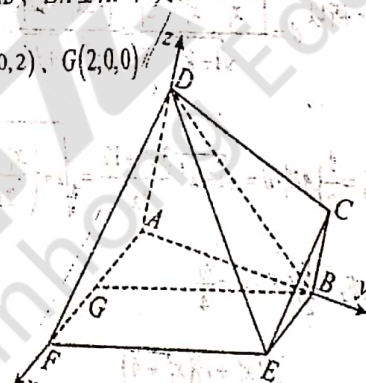
$\therefore$ 直线 BF 与平面 DCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5} = \left| \cos \langle \overrightarrow{BF}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BF} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BF}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2a - 2|}{\sqrt{a^2 + 4} \times 3},$$

$$\text{化简得 } 11a^2 - 40a - 16 = 0, \text{ 解得 } a = 4 \text{ 或 } a = -\frac{4}{11} \text{ (舍去)}, \text{ 故 } AF = 4 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{此时梯形 } ABEF \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} (1 + 4) \cdot 2 = 5 \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{故 } V_{D-ABEF} = \frac{1}{3} S_{ABEF} \cdot DA = \frac{10}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



20. 解：由抛物线焦点 $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，可得 $p = \frac{1}{2}$ ，.....2分

所以抛物线方程为 $x^2 = 2y$ ，准线方程为 $y = -\frac{1}{2}$ ，.....4分

(2) 法一：设直线 $AB: y = kx + \frac{1}{2}$ ，点 $A\left(x_1, \frac{x_1^2}{2}\right)$ ($x_1 > 0$)， $B\left(x_2, \frac{x_2^2}{2}\right)$ ，

联立 $\begin{cases} x^2 = 2y \\ y = kx + \frac{1}{2} \end{cases}$ ，得 $x^2 - 2kx - 1 = 0$ ，即 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$ ，.....6分

所以 $|AB| = \sqrt{(1+k^2)} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = 2(k^2+1)$ ，.....7分

且 $k_{OE} = \frac{x_1}{2}$ ，又 $\because OE \perp OA$ ， $\therefore k_{OE} = -\frac{2}{x_1}$ ， OE 的方程为 $y = -\frac{2}{x_1}x$ ，即点 $E\left(-\frac{4}{x_1}, \frac{8}{x_1^2}\right)$ ，.....8分

点 E 到直线 AB 的距离 $d = \frac{\left| -\frac{4k}{x_1} - \frac{8}{x_1^2} + \frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1+k^2}}$ ，又 $x_1^2 - 2kx_1 - 1 = 0$ ， $2kx_1 = x_1^2 - 1$ ， $k = \frac{x_1^2 - 1}{2x_1}$ ，

所以 $d = \frac{\left| \frac{4k}{x_1} - \frac{8}{x_1^2} + \frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\left| -\frac{3x_1^2 - 12}{2x_1^2} \right|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{3x_1^2 + 12}{2x_1^2 \sqrt{1+k^2}}$ ，

$S_1 = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{3x_1^2 + 12}{2x_1^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x_1^2 - 1}{2x_1}\right)^2} \cdot \frac{3x_1^2 + 12}{2x_1^2} = \frac{3(x_1^2 + 1)(x_1^2 + 4)}{4x_1^3}$ ，

又 $S_2 = \frac{1}{2} |OF| \cdot x_1 = \frac{x_1}{4}$ ，

所以 $S_1 S_2 = \frac{3(x_1^2 + 1)(x_1^2 + 4)}{16x_1^2}$ ，.....10分

$= \frac{3}{16} \left(x_1^2 + \frac{4}{x_1^2} + 5 \right) \geq \frac{3}{16} \left(2\sqrt{x_1^2 \cdot \frac{4}{x_1^2}} + 5 \right) = \frac{27}{16}$ ，

当且仅当 $x_1^2 = \frac{4}{x_1^2}$ ，即 $x_1 = \sqrt{2}$ 时，等号成立，此时点 A 为 $(\sqrt{2}, 1)$ ，

即 $S_1 S_2$ 的最小值为 $\frac{27}{16}$ ，此时点 A 的坐标为 $(\sqrt{2}, 1)$ ，.....12分

法二：设直线 $AB: y = kx + \frac{1}{2}$ ，点 $A\left(x_1, \frac{x_1^2}{2}\right)$ ($x_1 > 0$)， $B\left(x_2, \frac{x_2^2}{2}\right)$ ， $E\left(x_3, \frac{x_3^2}{2}\right)$ ，令 $x_1 = a$ ，则 $A\left(a, \frac{a^2}{2}\right)$ ，

联立 $\begin{cases} x^2 = 2y \\ y = kx + \frac{1}{2} \end{cases}$ ，得 $x^2 - 2kx - 1 = 0$ ，即 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$ ，

故 $x_2 = -\frac{1}{x_1} = -\frac{1}{a}$ ， $B\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{2a^2}\right)$

$$\text{又 } OE \perp OA, \text{ 故 } \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow x_1 x_2 + \frac{x_1^2 x_2^2}{4} = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = \frac{-4}{x_1} = \frac{-4}{a}, \text{ 故 } E\left(-\frac{4}{a}, \frac{8}{a^2}\right)$$

$$\overrightarrow{BA} = \left(a + \frac{1}{a}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2}\right), \overrightarrow{BE} = \left(-\frac{3}{a}, \frac{15}{2a^2}\right), S_1 = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BE}| = \frac{1}{2} \left| \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{15}{2a^2} - \left(-\frac{1}{2a^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{a}\right) \right|,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OF}| \cdot x_1 = \frac{1}{4} a$$

$$\text{故 } S_1 S_2 = \frac{1}{2} \left| \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{15}{2a^2} - \left(-\frac{1}{2a^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{a}\right) \right| \cdot \frac{1}{4} a = \frac{1}{8} \left(\frac{6}{a^2} + \frac{3a^2}{2} + \frac{15}{2} \right) \geq \frac{1}{8} \left(2\sqrt{\frac{6}{a^2} \cdot \frac{3a^2}{2}} + \frac{15}{2} \right) = \frac{27}{16}$$

$$\text{当且仅当 } \frac{6}{a^2} = \frac{3a^2}{2}, \text{ 即 } a = \sqrt{2} \text{ 时, 等号成立, 此时点 } A \text{ 为 } (\sqrt{2}, 1),$$

$$\text{即 } S_1 S_2 \text{ 的最小值为 } \frac{27}{16}, \text{ 此时点 } A \text{ 的坐标为 } (\sqrt{2}, 1)$$

21. 解: (1) $f'(x) = xe^x$ 1 分

由 $f'(x) > 0$ 解得 $x > 0$, 故 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增 2 分

由 $f'(x) < 0$ 解得 $x < 0$, 故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 3 分

故 $f(x)$ 的最小值是 $f(0) = a - 1 \geq 0$, 解得 $a \geq 1$ 4 分

(2) 在 (1) 中, 令 $a = 1$ 时, $xe^x - e^x + 1 \geq 0$, 令 $t = e^x$, 得到: $t \ln t - t + 1 \geq 0$

即: $\ln t \geq 1 - \frac{1}{t}$ 6 分

令 $t = \frac{n+k}{n+k-1}$, 则 $\ln \frac{n+k}{n+k-1} > \frac{1}{n+k}$,

所以, $\frac{1}{n+k} < \ln \frac{n+k}{n+k-1} = \ln(n+k) - \ln(n+k-1)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, 8 分

令 $g(x) = x - \sin x (x > 0)$, 则 $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 且 $g'(x)$ 不恒为零.

所以, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x) > g(0) = 0$, 则 $\sin x < x (x > 0)$ 9 分

所以, $\sin \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n+k} < \ln(n+k) - \ln(n+k-1)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$,

所以, $\sin \frac{1}{n+1} + \sin \frac{1}{n+2} + \dots + \sin \frac{1}{2n}$

$< [\ln(n+1) - \ln n] + [\ln(n+2) - \ln(n+1)] + \dots + [\ln(2n) - \ln(2n-1)]$

$= \ln(2n) - \ln n = \ln \frac{2n}{n} = 2$ 12 分

22. (1) 依题意,

把 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ 代入 $x - 7y + 8 = 0$,

得直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta - 7\rho \sin \theta + 8 = 0$: 2 分

把 $x^2 + y^2 = \rho^2$, $x = \rho \cos \theta$ 代入 $x^2 + y^2 - 4x = 0$,

得 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta = 0$, 即曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$ 5 分

(2) 法一：联立 $\rho \cos \theta - 7 \rho \sin \theta + 8 = 0$ 和 $\rho = 4 \cos \theta$,

$$\text{得 } 4 \cos \theta \cos \theta - 28 \cos \theta \sin \theta + 8 = 0,$$

$$\text{即 } \cos^2 \theta - 7 \cos \theta \sin \theta + 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0,$$

$$3 \cos^2 \theta - 7 \cos \theta \sin \theta + 2 \sin^2 \theta = 0,$$

$$\text{即 } 2 \tan^2 \theta - 7 \tan \theta + 3 = 0,$$

$$(2 \tan \theta - 1)(\tan \theta - 3) = 0,$$

$$\text{所以 } \tan \theta = \frac{1}{2} \text{ 或 } \tan \theta = 3, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

即 A, B 两点对应的极角的正切值分别是 $\frac{1}{2}$ 和 3,

$$\text{于是 } \tan \angle AOB = \left| \tan(\theta_A - \theta_B) \right| = \left| \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} \right| = 1, \text{ 所以 } \angle AOB = \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{法二：联立：} \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ x - 7y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow 25x^2 - 90x + 32 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{16}{5} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{故 } A\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right), B\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right), \tan \angle AOx = k_{OA} = 3, \tan \angle BOx = k_{OB} = \frac{1}{2}$$

$$\text{所以 } \tan \angle AOB = \tan(\angle AOx - \angle BOx) = \frac{\tan \angle AOx - \tan \angle BOx}{1 + \tan \angle AOx \cdot \tan \angle BOx} = 1,$$

$$\text{所以 } \angle AOB = \frac{\pi}{4}$$

$$23. \text{ 解：由基本不等式可知 } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c} \geq 3\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{4}{c}} = 3\sqrt{8} = 6,$$

$$\text{当且仅当 } \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{4}{c}, \text{ 即 } a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 2 \text{ 时等号成立, 所以 } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{4}{c} \text{ 的最小值为 } 6 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } abc = 1, \text{ 所以 } bc + ac + ab = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{\frac{a+b}{2}} = \frac{4}{a+b}.$$

$$\text{同理可得 } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c}, \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+c} \text{ 所以 } 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{4}{b+c} + \frac{4}{a+c} + \frac{4}{a+b},$$

$$\text{当且仅当 } a = b = c \text{ 时等号成立, 所以 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+c} + \frac{2}{a+b},$$

$$\text{即 } bc + ac + ab \geq \frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+c} + \frac{2}{a+b} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$