

成都市 2021 级高中毕业班摸底测试

数学(文科)参考答案及评分意见

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. C; 2. B; 3. A; 4. D; 5. D; 6. A; 7. C; 8. D; 9. C; 10. B; 11. B; 12. C.

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\sqrt{2}$; 14. 武术; 15. 7; 16. -1 .

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) $f'(x) = 3x^2 + a$2 分

$$\because f'(2) = 0,$$

$$\therefore 3 \times 2^2 + a = 0.$$

解得 $a = -12$4 分

$$(II) \text{ 由 (I) 得 } f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2).$$

由 $f'(x) > 0$, 解得 $x < -2$ 或 $x > 2$; 由 $f'(x) < 0$, 解得 $-2 < x < 2$6 分

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-3, -2]$, $[2, 4]$ 单调递增; 在 $[-2, 2]$ 单调递减.8 分

又 $f(-3) = 19, f(-2) = 26, f(2) = -6, f(4) = 26$,10 分

$\therefore f_{\min}(x) = f(2) = -6, f_{\max}(x) = f(-2) = f(4) = 26$11 分

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-3, 4]$ 的值域为 $[-6, 26]$12 分

18. 解:(I) 由题意得 $\bar{x} = \frac{1}{5}(12 + 11 + 10 + 9 + 8) = 10$,1 分

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(5 + 6 + 8 + 10 + 11) = 8. \quad \text{.....2 分}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -16, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10. \quad \text{.....4 分}$$

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = -1.6, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 24. \quad \text{.....6 分}$$

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = -1.6x + 24$8 分

(II) 当 $x = 6$ 时, $\hat{y} = 14.4 < 15$10 分

$\therefore$ 当该产品定价为 6 万元时需求量不超过 15 吨.12 分

19. 解：(I) 由题意设 $BD = AE = x$ ，则 $AD = AB - BD = 4 - x$ 。

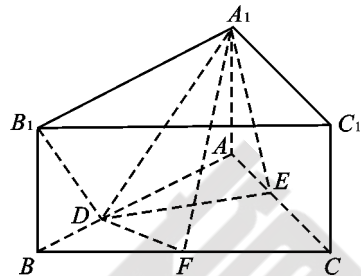
$$\therefore V_{A-A_1DE} = V_{A_1-ADE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADE} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} x(4-x) \times 2. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore x(4-x) \leq \left(\frac{x+4-x}{2} \right)^2 = 4 \text{ (当且仅当 } x=2 \text{ 时}$$

取等号)，\dots\dots 4 \text{ 分}

$$\therefore V_{A-A_1DE} \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = \frac{4}{3}.$$

\therefore 三棱锥 $A - A_1DE$ 体积的最大值为 $\frac{4}{3}$ 。 \dots\dots 5 \text{ 分}



(II) 由(I)知当三棱锥 $A - A_1DE$ 体积取得最大值时， D, E 分别为棱 AB, AC 的中点。\dots\dots 6 \text{ 分}

\therefore F 为 BC 中点，

\therefore $DF \parallel AC$ 。

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，由 $A_1A \perp$ 平面 ABC ，得 $A_1A \perp AC$ 。

\therefore $A_1A \perp AC$ ， $BA \perp AC$ ， $AB \cap A_1A = A$ ， $A_1A, AB \subset$ 平面 A_1ABB_1 ，

\therefore $AC \perp$ 平面 ABB_1A_1 。

\therefore $DF \perp$ 平面 ABB_1A_1 。

\therefore $DF \perp B_1D$ 。 \dots\dots 8 \text{ 分}

由 $AA_1 \perp AB$ ，在 $Rt \triangle A_1AD$ 中， $A_1D = \sqrt{AA_1^2 + AD^2} = 2\sqrt{2}$ 。 \dots\dots 9 \text{ 分}

同理在 $Rt \triangle B_1BD$ 中， $B_1D = 2\sqrt{2}$ 。 \dots\dots 10 \text{ 分}

$$\text{又 } A_1B_1^2 = 16 = A_1D^2 + B_1D^2,$$

\therefore $B_1D \perp A_1D$ 。 \dots\dots 11 \text{ 分}

又 $DF \cap A_1D = D$ ， $DF, A_1D \subset$ 平面 A_1DF ，

\therefore $B_1D \perp$ 平面 A_1DF 。 \dots\dots 12 \text{ 分}

20. 解：(I) \therefore 椭圆 E 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且椭圆 E 上的点到其左、右焦点距离之和为 4，

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \text{ 且 } 2a = 4. \text{ 解得 } a = 2, c = 1. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore a^2 = 4, b^2 = a^2 - c^2 = 3. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{椭圆 } E \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 由题意知直线 l 的斜率为 0 时显然不成立。 \dots\dots 5 \text{ 分}

设直线 l 的方程为 $x = my - 1$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} x=my-1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (3m^2+4)y^2 - 6my - 9 = 0.$$

$$\text{显然 } \Delta = 144(m^2+1) > 0.$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2+4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2+4}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3m}{3m^2+4}, \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{my_1 - 1 + my_2 - 1}{2} = \frac{-4}{3m^2+4}.$$

$$\text{由 } M \text{ 为 } AB \text{ 的中点, 得 } M\left(\frac{-4}{3m^2+4}, \frac{3m}{3m^2+4}\right).$$

$$\text{由 } \overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OM}, \text{ 得 } N\left(\frac{-12}{3m^2+4}, \frac{9m}{3m^2+4}\right). \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又点 } N \text{ 在椭圆 } E \text{ 上, 则 } \frac{\left(\frac{-12}{3m^2+4}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{9m}{3m^2+4}\right)^2}{3} = 1.$$

$$\text{解得 } m^2 = \frac{5}{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OF| |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{6\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4} = \frac{4\sqrt{6}}{9}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OM},$$

$$\therefore \text{四边形 } AOBN \text{ 的面积 } S_{AOBN} = 3S_{\triangle AOB} = \frac{4\sqrt{6}}{3}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解:(I) 当 $a=1$ 时, 函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} (x > 0). \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

由 $f'(x) > 0$ 解得 $x > 1$; 由 $f'(x) < 0$ 解得 $0 < x < 1$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 1)$. $\dots\dots 4 \text{ 分}$

(II) 由题意当 $x > 1$ 时, $f(x) > -2$, 即 $a(1 - \frac{1}{x}) < \ln x + 2$.

$$\text{整理得 } a < \frac{x \ln x + 2x}{x-1}.$$

$$\text{令函数 } g(x) = \frac{x \ln x + 2x}{x-1} (x > 1). \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{x - \ln x - 3}{(x-1)^2} (x > 1).$$

$$\text{令 } h(x) = x - \ln x - 3 (x > 1). \text{ 则 } h'(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$ 恒成立.

$\therefore h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

.....8 分

又 $h(4) = 1 - \ln 4 < 0, h(5) = 2 - \ln 5 > 0$,

$\therefore \exists x_0 \in (4, 5)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $\ln x_0 = x_0 - 3$.

$\therefore x \in (1, x_0)$ 时, $h(x) < 0$; $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增,

.....10 分

$$\text{则 } g_{\min}(x) = g(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + 2x_0}{x_0 - 1} = \frac{x_0(x_0 - 3) + 2x_0}{x_0 - 1} = x_0.$$

由 $a < g(x)$ 恒成立, 则 $a < g_{\min}(x) = g(x_0) = x_0 \in (4, 5)$.

.....11 分

$\therefore$ 整数 a 的最大值为 4.

.....12 分

22. 解:(I) 由曲线 C_1 的参数方程消去参数 t , 得曲线 C_1 的普通方程为 $x^2 = 4y$.

.....2 分

$\because x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$,

化简得曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x + y - 5 = 0$.

.....4 分

$$(II) \text{ 由题意得曲线 } C_2 \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}m, \\ y = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}m \end{cases} \quad (m \text{ 为参数}).$$

.....6 分

将其代入 $x^2 = 4y$, 得 $m^2 - 8\sqrt{2}m - 16 = 0$.

.....7 分

$$\Delta = (8\sqrt{2})^2 + 64 = 192 > 0.$$

设 A, B 两点对应的参数分别为 m_1, m_2 .

则 $m_1 + m_2 = 8\sqrt{2}, m_1 m_2 = -16$.

.....8 分

则 m_1, m_2 为一正一负,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} &= \frac{1}{|m_1|} + \frac{1}{|m_2|} = \frac{|m_1| + |m_2|}{|m_1| |m_2|} = \frac{|m_1 - m_2|}{|m_1| |m_2|} \\ &= \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{|m_1 m_2|} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

.....10 分