

成都市 2021 级高中毕业班摸底测试

数学(理科)参考答案及评分意见

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. C; 2. B; 3. A; 4. D; 5. D; 6. A; 7. C; 8. D; 9. B; 10. C; 11. B; 12. C.

第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\sqrt{2}$; 14. 武术; 15. $2x - y - 2 = 0$; 16. 2.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) $f'(x) = 3x^2 + a$2 分

$$\because f'(2) = 0,$$

$$\therefore 3 \times 2^2 + a = 0.$$

解得 $a = -12$4 分

$$(II) \text{ 由 (I) 得 } f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2).$$

由 $f'(x) > 0$, 解得 $x < -2$ 或 $x > 2$; 由 $f'(x) < 0$, 解得 $-2 < x < 2$6 分 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-3, -2]$, $[2, 4]$ 单调递增; 在 $[-2, 2]$ 单调递减.8 分又 $f(-3) = 19, f(-2) = 26, f(2) = -6, f(4) = 26$,10 分 $\therefore f_{\min}(x) = f(2) = -6, f_{\max}(x) = f(-2) = f(4) = 26$11 分 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-3, 4]$ 的值域为 $[-6, 26]$12 分18. 解:(I) 由题意得 $\bar{x} = \frac{1}{5}(12 + 11 + 10 + 9 + 8) = 10$,1 分

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(5 + 6 + 8 + 10 + 11) = 8. \quad \text{.....2 分}$$

$$\because \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -16, \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10. \quad \text{.....4 分}$$

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = -1.6, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 24. \quad \text{.....6 分}$$

 $\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = -1.6x + 24$8 分(II) 当 $x = 6$ 时, $\hat{y} = 14.4 < 15$10 分 $\therefore$ 当该产品定价为 6 万元时需求量不超过 15 吨.12 分19. 解:(I) 如图, 连接 AB_1 .

$$\because AB = AA_1 = 2,$$

∴ 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中四边形 A_1ABB_1 为正方形.

∴ $AB_1 \perp A_1B$1 分

又 $A_1B \perp B_1C$, $B_1C \cap AB_1 = B_1$, $AB_1, B_1C \subset$ 平面 AB_1C ,

∴ $A_1B \perp$ 平面 AB_1C3 分

∵ $AC \subset$ 平面 AB_1C ,

∴ $A_1B \perp AC$.

又 $A_1A \perp AC$, $A_1B \cap A_1A = A_1$, $A_1A, A_1B \subset$ 平面 A_1ABB_1 ,

∴ $AC \perp$ 平面 A_1ABB_15 分

(II) 由题意设 $BD = AE = t$, 则 $AD = AB - BD = 2 - t$.

∴ $V_{A-A_1DE} = V_{A_1-ADE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADE} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} t(2-t) \times 2$6 分

∴ $t(2-t) \leq \left(\frac{t+2-t}{2}\right)^2 = 1$ (当且仅当 $t=1$ 时取等号),

∴ $V_{A-A_1DE} \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}$, 此时 D, E 分别为棱 AB, AC 的中点.7 分

以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$.

则 $A(0,0,0), A_1(0,0,2), D(1,0,0), E(0,1,0), \overrightarrow{DA_1} = (-1,0,2), \overrightarrow{DE} = (-1,1,0)$.

设平面 DA_1E 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$.

由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DA_1} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -x + 2z = 0, \\ -x + y = 0. \end{cases}$ 令 $x = 2$, 得 $\mathbf{m} = (2, 2, 1)$9 分

又平面 DA_1A 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$10 分

设二面角 $A - DA_1 - E$ 的平面角为 θ .

∴ $|\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} \right| = \frac{2}{3}$,11 分

结合图形, 易知二面角 $A - DA_1 - E$ 为锐角.

∴ 二面角 $A - DA_1 - E$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$12 分

20. 解: (I) ∵ 椭圆 E 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且椭圆 E 上的点到其左、右焦点距离之和为 4,

∴ $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ 且 $2a = 4$. 解得 $a = 2, c = 1$2 分

∴ $a^2 = 4, b^2 = a^2 - c^2 = 3$3 分

∴ 椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

(II) 由题意知直线 l 的斜率为 0 时显然不成立.5 分

设直线 l 的方程为 $x = my - 1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} x = my - 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 消去 x , 得 $(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$.

显然 $\Delta = 144(m^2 + 1) > 0$.

则 $y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$6 分

$$\therefore \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3m}{3m^2 + 4}, \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{my_1 - 1 + my_2 - 1}{2} = \frac{-4}{3m^2 + 4}.$$

$\therefore M$ 为 AB 的中点, $\therefore M(\frac{-4}{3m^2 + 4}, \frac{3m}{3m^2 + 4})$.

$\therefore \overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OM}, \therefore N(\frac{-4\lambda}{3m^2 + 4}, \frac{3\lambda m}{3m^2 + 4})$.

又点 N 在椭圆 E 上, 则 $\frac{(\frac{-4\lambda}{3m^2 + 4})^2}{4} + \frac{(\frac{3\lambda m}{3m^2 + 4})^2}{3} = 1$.

解得 $3m^2 + 4 = \lambda^2$8 分

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OF| |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{6\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4}.$$

$\therefore \overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OM}$,

$\therefore$ 四边形 $AOBN$ 的面积

$$S_{AOBN} = \lambda S_{\triangle AOB} = \frac{6\lambda \sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4} = \frac{6\lambda \sqrt{m^2 + 1}}{\lambda^2} = \frac{6\sqrt{\frac{\lambda^2}{3} - \frac{1}{3}}}{\lambda} = 6\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3\lambda^2}}.$$

.....10 分

$\therefore \lambda^2 = 3m^2 + 4 \geq 4$,

$\therefore S_{AOBN} = 6\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3\lambda^2}} \geq 3$ (当且仅当 $\lambda = 2$ 时取等号).

$\therefore$ 当 $\lambda = 2$ 时, 四边形 $AOBN$ 面积最小值为 3.

.....12 分

21. 解: (I) 当 $a = -2$ 时, 函数 $f(x) = \ln x - 2x^2$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 4x = \frac{1 - 4x^2}{x} (x > 0).$$

.....2 分

由 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < \frac{1}{2}$; 由 $f'(x) < 0$, 解得 $x > \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{2})$, 单调递减区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$4 分

(II) 由题意当 $x > 1$ 时, $f(x) < e^x$. 整理得 $a < \frac{e^x - \ln x}{x^2}$.

令函数 $g(x) = \frac{e^x - \ln x}{x^2} (x > 1)$6 分

$$\text{则 } g'(x) = \frac{(e^x - \frac{1}{x})x^2 - 2x(e^x - \ln x)}{x^4} = \frac{(x - 2)e^x + 2\ln x - 1}{x^3}.$$

令 $h(x) = (x - 2)e^x + 2\ln x - 1 (x > 1)$. 则 $h'(x) = (x - 1)e^x + \frac{2}{x}$.

当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$ 恒成立.

$\therefore h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.8 分

$$\text{又 } \because h\left(\frac{3}{2}\right) = 2\ln \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} < 0, h(2) = 2\ln 2 - 1 > 0,$$

$$\therefore \exists x_0 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right), \text{使得 } h(x_0) = 0, \text{即 } -\ln x_0 = \left(\frac{x_0}{2} - 1\right)e^{x_0} - \frac{1}{2}.$$

$\therefore x \in (1, x_0)$ 时, $h(x) < 0$; $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(1, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增,10 分

$$\text{则 } g(x_0) = \frac{e^{x_0} - \ln x_0}{x_0^2} = \frac{e^{x_0} + \left(\frac{x_0}{2} - 1\right)e^{x_0} - \frac{1}{2}}{x_0^2} = \frac{\frac{x_0}{2}e^{x_0} - \frac{1}{2}}{x_0^2} = \frac{e^{x_0}}{2x_0} - \frac{1}{2x_0^2}.$$

$$\text{令函数 } \varphi(x) = \frac{e^x}{2x} - \frac{1}{2x^2} (x > 1). \text{ 则 } \varphi'(x) = \frac{e^x(x-1)}{2x^2} + \frac{1}{x^3} > 0.$$

$\therefore \varphi(x)$ 在 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 单调递增.

$$\therefore \varphi\left(\frac{3}{2}\right) < g(x_0) < \varphi(2).$$

$$\text{又 } \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9} > 1 \Leftrightarrow e > \sqrt[3]{\frac{121}{9}}, \text{ 而 } \sqrt[3]{\frac{121}{9}} = \sqrt[3]{\frac{363}{27}} < \sqrt[3]{\frac{512}{27}} = \frac{8}{3} < e,$$

$$\therefore \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9} > 1. \text{ 又 } \varphi(2) = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{8} < 2,$$

$$\therefore a < g_{\min}(x) = g(x_0) \in (1, 2).$$

$\therefore$ 整数 a 的最大值为 1.12 分

22. 解: (I) 由曲线 C_1 的参数方程消去参数 t , 得曲线 C_1 的普通方程为 $x^2 = 4y$.

.....2 分

$$\because x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta,$$

$$\text{化简得曲线 } C_2 \text{ 的直角坐标方程为 } x + y - 5 = 0.$$

.....4 分

$$\text{(II) 由题意得曲线 } C_2 \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}m, \\ y = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}m \end{cases} \quad (m \text{ 为参数}). \quad \text{.....6 分}$$

$$\text{将其代入 } x^2 = 4y, \text{ 得 } m^2 - 8\sqrt{2}m - 16 = 0.$$

.....7 分

$$\Delta = (8\sqrt{2})^2 + 64 = 192 > 0.$$

设 A, B 两点对应的参数分别为 m_1, m_2 .

$$\text{则 } m_1 + m_2 = 8\sqrt{2}, m_1 m_2 = -16.$$

.....8 分

则 m_1, m_2 为一正一负,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} &= \frac{1}{|m_1|} + \frac{1}{|m_2|} = \frac{|m_1| + |m_2|}{|m_1||m_2|} = \frac{|m_1 - m_2|}{|m_1||m_2|} \\ &= \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{|m_1 m_2|} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad \text{.....10 分}$$