

资阳市高中 2021 级第一次诊断性考试

理科数学参考答案和评分意见

注意事项:

1. 本解答给出了一种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2. 对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分。

3. 解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分。选择题和填空题不给中间分。

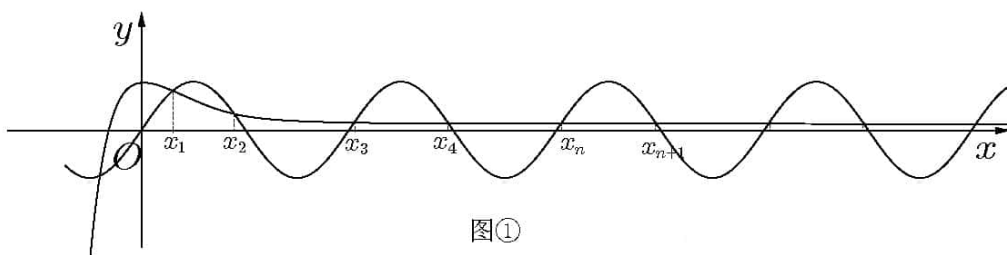
一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。

1-5: BBCCD; 6-10: ACAAB; 11-12: CD

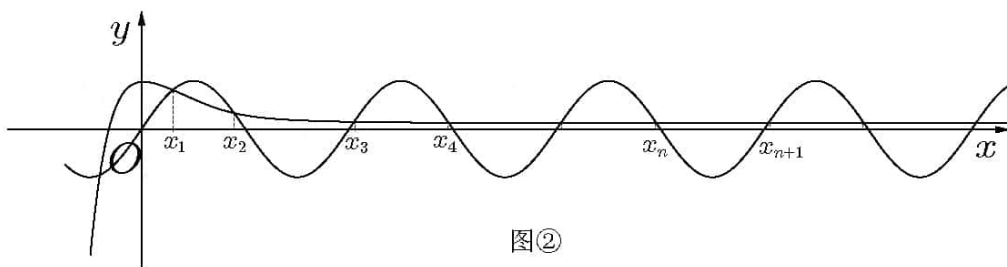
12 题:

命题意图:本小题设置余弦函数、指数函数、整式函数等四则运算结果的新函数为探索创新情境,主要考查利用导数研究函数的图象和性质、数列等必备知识;考查化归与转化、数形结合等数学思想;考查数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养。

解析参考:依题意, $f'(x) = -\sin x + \frac{x+1}{e^x}$. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的所有极值点,即考虑 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点,即考虑函数 $u(x) = \frac{x+1}{e^x}$ 与 $v(x) = \sin x$ 图象交点横坐标及相互关系即可。



图①



图②



显然,选项 A 不合题意; $x_{n+1}-x_n < \pi$ 也可能 $x_{n+1}-x_n > \pi$, B 选项错误;对于 C,取特例可知, $x_1+x_2 > \pi$, $x_2+x_3 < 3\pi$,结合图①和图②,也可得到 $x_n+x_{n+1} > (2n-1)\pi$ 或者 $x_n+x_{n+1} < (2n-1)\pi$, C 错误; $|x_n-(n-1)\pi|$ 在 x 轴上表示 x_n 与 $(n-1)\pi$ 的距离,由于 $u(x) = \frac{x+1}{e^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,可知 $|x_n-(n-1)\pi|$ 越来越小, D 选项正确.

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 2; 14. 1; 15. 10; 16. $(-\infty, 1)$.

16 题:命题意图:本小题设置探索创新情境,主要考查利用导数研究函数的图象和性质等必备知识;考查化归与转化、数形结合等数学思想;考查数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养;本题力破了“直接寻找最小值”这一解题套路,考查数学思维的敏捷性和灵活性,考查数学视野.

解析参考:注意到,当 $a=1$ 时, $f(x) = e^x + \cos x$, 由于 $e^x > 0$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, 显然 $f(x) \rightarrow -1$, 没有最小值;当 $a > 1$ 时, $e^x + \cos x > -1$ 且无限接近 -1 , $y = (a-1)x$ 为增函数, 则 $x \rightarrow -\infty$, $e^x + \cos x + (a-1)x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $e^x + \cos x + (a-1)x \rightarrow +\infty$, 此时没有最小值;当 $a < 1$ 时, $y = (a-1)x$ 为减函数, 则 $x \rightarrow -\infty$, $e^x + \cos x + (a-1)x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$, 由于 $y = e^x$ 增长变化速度远大于 $y = (a-1)x$ 减少速度, 此时 $e^x + \cos x + (a-1)x \rightarrow +\infty$, 也可以结合大致图象特征判断, $f(x) = e^x + \cos x + (a-1)x$ 存在最小值.

三、解答题:本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一) 必考题:共 60 分.

17. (12 分)

(1) 设公差为 d ,

依题意,得 $\begin{cases} a_1 + 8d + a_1 + 9d = 40, \\ 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2}d = 8(2a_1 + 2d), \end{cases}$ 2 分

即 $\begin{cases} 2a_1 + 17d = 40, \\ a_1 = \frac{3}{2}d, \end{cases}$ 解得 $a_1 = 3, d = 2$, 4 分

所以 $a_n = 2n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 6 分

(2) 由 (1) 知, $b_n = (-1)^{n+1} \frac{a_n}{n(n+1)} = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$, 8 分

$$\begin{aligned} T_{2n} &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{2n}{2n+1}. \end{aligned}$$



所以, $T_{2n} = \frac{2n}{2n+1}$12分

18. (12分)

(1) 由已知 $b \sin C = c \sin \frac{B}{2}$, 根据正弦定理, 得 $\sin B \sin C = \sin C \sin \frac{B}{2}$,1分

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C \neq 0$,

故有 $\sin B = \sin \frac{B}{2}$,2分

即有 $2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2}$,

因为 $\frac{B}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\sin \frac{B}{2} \neq 0$, 则 $\cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$,4分

所以, $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{3}$, 则 $B = \frac{2\pi}{3}$5分

(2) 依题意, $\frac{1}{2} a \cdot BD \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} c \cdot BD \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} ac \sin \frac{2\pi}{3}$,

即 $a \cdot BD + c \cdot BD = ac$, 也即为 $2BD + c \cdot BD = 2c$,

所以 $BD = \frac{2c}{2+c}$,9分

在 $\triangle ABC$ 中, 根据余弦定理,

有 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{2\pi}{3} = a^2 + c^2 + ac$, 即 $7 = 4 + c^2 + 2c$,

解得 $c = 1$, 或 $c = -3$ (舍去),

所以 $BD = \frac{2c}{2+c} = \frac{2}{3}$12分

19. (12分)

(1) 由 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} a_n$,①

得 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n + (n+1)a_{n+1} = \frac{2(n+1)^2 + 3(n+1) + 1}{6} a_{n+1}$,②

②式 - ①式, 得 $(n+1)a_{n+1} = \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} a_{n+1} - \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} a_n$,

化简得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}$, 即有 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n}$,4分

则 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n-1}}{n-1} = \dots = \frac{a_2}{2} = \frac{a_1}{1} = 1$, 即 $a_n = n$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$ 满足该式,

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n$6分

(2) 由 $\log_3 b_n = a_n$, 得 $b_n = 3^{a_n} = 3^n$, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{3^n}$,7分

所以 $T_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n}$,③

则有 $\frac{1}{3} T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}$,④8分

③式 - ④式, 得 $\frac{2}{3} T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$



$$= \frac{\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2n+3}{2 \times 3^{n+1}},$$

所以 $T_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \times 3^n} \dots\dots\dots 12 \text{分}$

20. (12分)

(1) 由 $f(x) = x \ln x - ax^2 - x$, 得 $f'(x) = \ln x - 2ax$,

因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f'(x) = \ln x - 2ax \leq 0$ 即 $2a \geq \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 时恒成立,

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

可知, $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; $x > e$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

故 $x = e$ 时, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上取得极大值 $g(e) = \frac{1}{e}$, 也即为最大值.

所以, $2a \geq \frac{1}{e}$, 得 $a \geq \frac{1}{2e}$,

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减时, a 的取值范围是 $[\frac{1}{2e}, +\infty)$. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 由 (1) 知, $f'(x) = \ln x - 2ax$,

函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 则 $f'(x) = \ln x - 2ax$ 有两个零点 x_1, x_2 ,

不妨设 $0 < x_1 < x_2$, 于是 $\begin{cases} \ln x_1 - 2ax_1 = 0, \\ \ln x_2 - 2ax_2 = 0, \end{cases}$

则 $\ln x_2 - \ln x_1 = 2a(x_2 - x_1)$, $\frac{1}{2a} = \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$, 于是

$$\frac{1}{\ln x_1} + \frac{1}{\ln x_2} - 2 = \frac{1}{2ax_1} + \frac{1}{2ax_2} - 2 = \frac{x_2 - x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) - 2 = \frac{\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - 2 \ln \frac{x_2}{x_1}}{\ln \frac{x_2}{x_1}}.$$

令 $\frac{x_2}{x_1} = t > 1$, 则 $\ln \frac{x_2}{x_1} > 0$, $\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - 2 \ln \frac{x_2}{x_1} = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t$,

设 $h(t) = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t (t > 1)$, 则 $h'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2} > 0$,

故函数 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(t) > h(1) = 0$, 则 $\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - 2 \ln \frac{x_2}{x_1} > 0$,

所以 $\frac{1}{\ln x_1} + \frac{1}{\ln x_2} - 2 > 0$, 即 $\frac{1}{\ln x_1} + \frac{1}{\ln x_2} > 2$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

21. (12分)

(1) 因为 $f(x) = e^x - 3ax^2$ 有三个零点,

所以方程 $e^x - 3ax^2 = 0$ 即 $\frac{1}{3a} = \frac{x^2}{e^x}$ 有三个实数根,

令 $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} = \frac{x(2 - x)}{e^x}$,



则 $x < 0$ 时, $g'(x) < 0$; $0 < x < 2$ 时, $g'(x) > 0$; $x > 2$ 时, $g'(x) < 0$,

所以, $x = 0$ 时, $g(x)$ 取极小值 $g(0) = 0$; $x = 2$ 时, $g(x)$ 取极大值 $g(2) = \frac{4}{e^2}$,

又 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$,

所以, $\frac{1}{3a} = \frac{x^2}{e^x}$ 有三个实数根时, $0 < \frac{1}{3a} < \frac{4}{e^2}$, 即 $a > \frac{e^2}{12}$,

综上所述, $f(x)$ 有 3 个零点时, a 的取值范围是 $(\frac{e^2}{12}, +\infty)$5 分

(2) 令 $h(x) = f(x) - (ax^3 + x + 1) = e^x - ax^3 - 3ax^2 - x - 1$,

则有 $h'(x) = e^x - 3ax^2 - 6ax - 1$, 且 $h'(0) = 0$, $h(0) = 0$,

设 $u(x) = h'(x) = e^x - 3ax^2 - 6ax - 1$, 则 $u'(x) = e^x - 6ax - 6a$,

又令 $v(x) = u'(x) = e^x - 6ax - 6a$, 则 $v'(x) = e^x - 6a$,

①若 $v'(0) = 1 - 6a \geq 0$, 即 $a \leq \frac{1}{6}$ 时,

由于 $v'(x)$ 为单调递增函数, 可知 $v'(x) \geq v'(0) \geq 0$,

则 $v(x)$ 即 $u'(x)$ 单调递增, 故 $u'(x) \geq u'(0) = 1 - 6a \geq 0$,

所以 $u(x)$ 即 $h'(x)$ 为单调递增函数,

则 $h'(x) \geq h'(0) = 0$, 则 $h(x)$ 单调递增,

所以 $h(x) \geq h(0) = 0$, 即 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq ax^3 + x + 1$ 恒成立,

所以, 当 $a \leq \frac{1}{6}$ 时, 符合条件.9 分

②若 $v'(0) = 1 - 6a < 0$, 即 $a > \frac{1}{6}$ 时,

由于 $v'(x) = e^x - 6a$ 为单调递增函数, 且 $v'(\ln(1 + 6a)) = 1 > 0$,

所以 $\exists x_0 \in (0, \ln(1 + 6a))$, $v'(x_0) = 0$,

则 $0 < x < x_0$ 时, $v'(x) < 0$,

可知 $v(x)$ 即 $u'(x)$ 单调递减, 则 $u'(x) \leq u'(0) = 0$,

故 $u(x)$ 即 $h'(x)$ 单调递减, 则 $h'(x) \leq h'(0) = 0$,

则 $h(x)$ 为单调递减函数,

所以, $h(x) \leq h(0) = 0$, 不符合题意.

综上所述, 当 $x \geq 0$, $f(x) \geq ax^3 + x + 1$ 时, a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{6}]$12 分

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

(1) 由于 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha, \end{cases}$

所以 C 的普通方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 其极坐标方程为 $\rho = 1$,2 分

直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 1$5 分



(2) 由题可知, $\triangle POQ$ 面积 $S = \frac{1}{2}|OP| \cdot |OQ| = \frac{1}{2}|\rho| = \frac{1}{2|\cos(\theta - \frac{\pi}{3})|}$,7分

因为 $\triangle POQ$ 的面积 S 为 1, 则 $S = \frac{1}{2|\cos(\theta - \frac{\pi}{3})|} = 1$, 则 $\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = \pm \frac{1}{2}$,8分

由于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则 $-\frac{\pi}{3} \leq \theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3}$,

则 $\theta - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$,

所以, $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \pi$ 或 $\frac{5\pi}{3}$10分

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

(1) 当 $x < -1$ 时, $f(x) = -2x + 2 - x - 1 = -3x + 1 \leq 4 - 2x$, 得 $-3 \leq x < -1$;

.....2分

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = -2x + 2 + x + 1 = -x + 3 \leq 4 - 2x$, 得 $-1 \leq x \leq 1$;3分

当 $x > 1$ 时, $f(x) = 2x - 2 + x + 1 = 3x - 1 \leq 4 - 2x$, 此时不成立,4分

综上所述, 原不等式解集为 $\{x | -3 \leq x \leq 1\}$5分

(2) 由 (1) 可知, $x < -1$ 时, $f(x) = -3x + 1 > 4$; $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = -x + 3 \geq 2$; $x > 1$ 时, $f(x) = 3x - 1 > 2$, 所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $M = 2$, 则 $a + b = 2$7分

因为 $[(a + \frac{1}{2})^2 + (b + \frac{1}{2})^2](1^2 + 1^2) \geq (a + \frac{1}{2} + b + \frac{1}{2})^2 = 9$,

所以 $(a + \frac{1}{2})^2 + (b + \frac{1}{2})^2 \geq \frac{9}{2}$, 当且仅当 $a = b = 1$ 时等号成立.

所以, $(a + \frac{1}{2})^2 + (b + \frac{1}{2})^2 \geq \frac{9}{2}$10分

