

德阳市高中 2021 级第一次诊断考试

数学试卷(文史类)

说明:

1. 本试卷分第 I 卷和第 II 卷,共 4 页,考生作答时,须将答案答在答题卡上,在本试卷、草稿纸上答题无效,考试结束后,将答题卡交回。
2. 本试卷满分 150 分,120 分钟完卷。

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

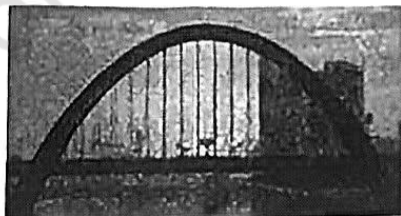
1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$, $B = \{x | x > a\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, 2)$ C. $[5, +\infty)$ D. $(5, +\infty)$

2. 设表示复数 z_1, z_2 的点在复平面内关于实轴对称, 且 $z_1 = 1 + i$, 下面关于复数 $z = \frac{-2}{z_1}$ 的四个命题中正确的是

A. $|z| = 2$ B. $z^2 = 2i$
C. z 的共轭复数为 $1 + i$ D. z 的虚部为 $-i$

3. 数学与建筑的结合造就建筑艺术品, 位于德阳市区的彩虹桥是一抛物线形水泥建筑物(如图). 若将彩虹桥的轮廓(忽略水泥建筑的厚度)近似看成抛物线 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的一部分, 且点 $A(2, -2)$ 在该抛物线上, 则该抛物线的焦点坐标是



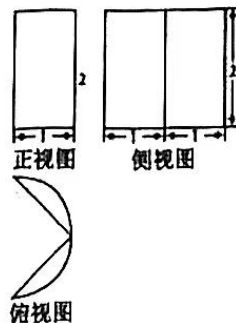
A. $(0, -\frac{1}{2})$ B. $(0, -1)$

C. $(0, -\frac{1}{4})$ D. $(0, -\frac{1}{8})$

4. 已知 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为共面的三个单位向量, 且 $\vec{i} \perp \vec{j}$, 则 $(\vec{i} + \vec{k}) \cdot (\vec{j} + \vec{k})$ 的取值范围是

A. $[-3, 3]$ B. $[-2, 2]$
C. $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$ D. $[1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1]$

5. 某几何体的三视图如图所示, 其中俯视图右侧曲线为半圆弧, 则几何体的体积为



A. $\pi - 2$ B. $\frac{\pi}{2} - 1$
C. $2\pi - 4$ D. $\pi - 1$

6. 某班主任为了了解该班学生暑假期间去图书馆的情况, 随机抽取该班 15 名学生, 调查得到这 15 名学生暑假期间去图书馆的次数分别为 8, 18, 15, 20, 16, 20, 19, 18, 10, 6, 20, 20, 23, 25, x (其中有一位学生的数据丢失记为 x), 则下列结论中正确的个数是

① 这组数据的中位数可能是 19; ② 这组数据的众数可能是 18; ③ x 的值可以通过中位数的值确定; ④ x 的值可以通过全部数据的平均数确定.

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

7. 小明同学过生日时, 他和好朋友小天一起分享一个质地均匀但形状不规则的蛋糕, 他们商量决定用刀把蛋糕平均分成两份(蛋糕厚度不计), 你认为下面的判断中正确的是

A. 无论从哪个位置(某个点) 切一刀都可以平均分成两份
B. 只能从某个位置(某个点) 切一刀才可以平均分成两份
C. 无论从哪个位置(某个点) 切一刀都不可以平均分成两份
D. 至少要切两刀才可以平均分成两份

8. $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ 是神经网络中重要的激活函数, 又称 Sigmoid 函数, 则下列对该函数图象和性质的描述中正确的是

A. $f(x)$ 的值域是 $(0, 1]$ B. $f(x)$ 的图象不是中心对称图形
C. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调 D. $f'(x) = f(x)[1 - f(x)]$ (其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数)

9. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), 设 p : 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增, q :

ω 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{3}\right]$, 则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

10. 德阳某高校为迎接 2023 年世界新能源大会, 决定选派一批志愿者参与志愿服务, 计划首次先选派 1 名志愿者, 然后每批次增加 1 人, 后因学生报名积极, 学校决定改变派遣计划, 若将原计划派遣的各批次人数看成数列 $\{a_n\}$, 保持数列 $\{a_n\}$ 中各项先后顺序不变的情况下, 在 a_k 与 a_{k+1} ($k = 1, 2, \dots$) 之间插入 2^k , 使它们和原数列的项依次构成一个新的数列 $\{b_n\}$, 若按照新数列 $\{b_n\}$ 的各项依次派遣学生, 则前 20 批次共派遣学生的人数为

A. 2091 B. 2101 C. 2110 D. 2112

11. 已知点 $P(x, y)$ 在曲线 $y = \frac{x^2}{4} + 1$ 上, 那么 $\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的取值范围是

A. $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ B. $[0, 1]$ C. $\left[0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ D. $[0, \sqrt{2}]$

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$ 且 $f(0) = 1$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$, 那么

A. $f(x)$ 为偶函数 B. $f(\pi) = 1$
C. $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数的极大值点 D. $f(x)$ 的最小值为 -2

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分,第 13 ~ 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答,第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.将答案填在答题卡上.

13. 已知 $10^m = 2, 10^n = 3$, 则 $2m + \lg 25 + 10^{m-n} =$ _____. (用数字作答)

14. 若不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 3y \geq 4 \\ 3x + y \leq 4 \end{cases}$ 所表示的平面区域被直线 $y = kx + \frac{4}{3}$ 分为面积相等的两部分

分,那么 $k =$ _____.

15. 某科学兴趣小组的同学认为生物都是由蛋白质构成的,高温可以使蛋白质变性失活,于是想初步探究某微生物的成活率与温度的关系,微生物数量 y (个) 与温度 x ($^{\circ}\text{C}$) 的部分数据如下表:

温度 x ($^{\circ}\text{C}$)	4	8	10	18
微生物数量 y (个)	30	22	18	14

由表中数据算得回归方程为 $\hat{y} = -x + \hat{a}$, 预测当温度为 22°C 时,微生物数量为 _____ 个.

16. 已知实数 a, b, c 成公差非零的等差数列,集合 $A = \{(x, y) | ax + by + c = 0\}$, $P(-3, 2), N(2, 3), M \in A$, 若 $\overrightarrow{MP} \parallel (a, b)$, 则 $|MN|$ 的最大值为 _____.

三、解答题:解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 12 分)

已知首项为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $-S_1, S_1, 3S_2$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{S_n + \frac{1}{S_n}\right\}$ 的最大项.

18. (本题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = b - 1, c = b + 1$.

(1) 若 $5\sin C = 7\sin A$, 求 AC 边上的中线 BD 的长;

(2) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 求 $\cos B$ 的取值范围.

19. (本题满分 12 分)

设函数 $f(x) = x^3 - ax - a, x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 x_0 为 $f(x)$ 极小值点, 且 $f(x_0) = f(x_1), x_1 \neq x_0$, 求 $f(x_1 - x_0)$ 的取值范围.

20. (本题满分 12 分)

2023 年 11 月, 世界首届人工智能峰会在英国举行, 我国因为在该领域取得的巨大成就受

邀进行大会发言. 为了研究不同性别的学生对人工智能的了解情况, 我市某著名高中进行了一次抽样调查, 分别抽取男、女生各 50 人作为样本. 据统计女生中了解人工智能的占 $\frac{3}{5}$, 了解人工智能的学生中男生占 $\frac{4}{7}$.

(1) 根据已知条件, 填写下列 2×2 列联表, 是否有 99% 把握推断该校学生对人工智能的了解情况与性别有关?

	了解人工智能	不了解人工智能	合计
男生			
女生			
合计			

(2) 将样本的频率视为概率, 现用分层抽样的方法从女生中抽取 5 人, 再从 5 人中抽取 3 人了解情况, 求抽取的 3 人中至少有 2 人了解人工智能的概率.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

21. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - xe^x - 1$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线 $y = g(x)$ 并比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系;
- (2) 记函数 $h(x) = \ln x - x + 1 - e^x - f(x)$ 的极大值点为 x_0 , 已知 $[t]$ 表示不超过 t 的最大整数, 求 $[h(x_0)]$.

请考生在 22、23 二题中任选一题作答. 注意: 只能做所选定的题目. 如果多做, 则按所做第一个题目计分, 作答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本题满分 10 分)

欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (i 为虚数单位, $\theta \in \mathbb{R}$) 可以表示平面直角坐标系 xOy 内的动点 $(\cos\theta, \sin\theta)$, 其轨迹是圆, 所以又称其为神奇的欧拉转盘. 若 $2\sin\theta e^{i\theta}$ 表示的动点为 P ,

- (1) 写出动点 P 的轨迹 C 的参数方程 (θ 为参数), 并化为普通方程;
- (2) 在以坐标原点为极点, x 轴非负半轴为极轴的极坐标系中, 直线 l 过 $(-1, 0)$, $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, 求直线 l 被 C 截得的线段的长.

23. (本题满分 10 分)

设 $a, b, c \in \mathbb{R}, a + b + c = 2, abc = 4$.

- (1) 证明: a, b, c 不可能都是正实数;
- (2) 比较 $|a| + |b| + |c|$ 与 6 的大小关系并说明理由.