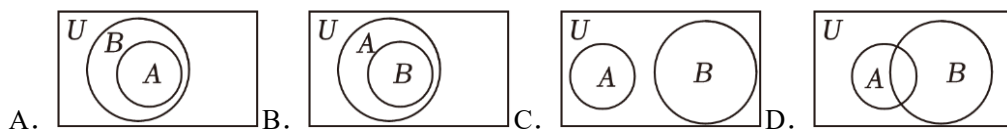


成都石室中学 2023-2024 年度下期高 2024 届入学考试文科答案

一、选择题（本题共 12 道小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知全集 $U = \mathbb{R}$ ，能表示集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x, 0\}$ 与 $B = \{1, 2\}$ 关系的 Venn 图是 ()



【解答】解：全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x, 0\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{1, 2\}$ ，

$\therefore B \subseteq A$ ， \therefore 能表示集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x, 0\}$ ， $B = \{1, 2\}$ 关系的 Venn 图是 B。

故选：B。

2. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 2)$ ， $\vec{b} = (3, 2)$ ，则 $\vec{a} + \vec{b}$ 在 $\vec{a} - \vec{b}$ 方向上投影为 ()

- A. 4 B. -2 C. 2 D. -4

解：由 $\vec{a} + \vec{b} = (2, 4)$ ， $\vec{a} - \vec{b} = (-4, 0)$ ，

则 $\vec{a} + \vec{b}$ 在 $\vec{a} - \vec{b}$ 方向上的投影向量为：

$$\frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{\vec{a}^2 - \vec{b}^2}{|\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{-8}{4} = -2. \text{ 故选：B.}$$

3. 5G 技术在我国已经进入高速发展的阶段，5G 手机的销量也逐渐上升，某手机商城统计了最近 5 个月手机的实际销量，如表所示：

时间 x	1	2	3	4	5
销售量 y (千只)	0.5	0.8	1.0	1.2	1.5

若 y 与 x 线性相关，且线性回归方程为 $\hat{y} = 0.24x + \hat{a}$ ，则下列说法不正确的是 ()

- A. 由题中数据可知，变量 y 与 x 正相关，且相关系数 $r < 1$
 B. 线性回归方程 $\hat{y} = 0.24x + \hat{a}$ 中 $\hat{a} = 0.26$
 C. 残差 $\hat{e}_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 的最大值与最小值之和为 0
 D. 可以预测 $x = 6$ 时该商场 5G 手机销量约为 1.72 (千只)

【解答】解：从数据看 y 随 x 的增加而增加，故变量 y 与 x 正相关，由于各增量并不相等，故相关系数 $r < 1$ ，故 A 正确；

由已知数据易得 $\bar{x} = 3, \bar{y} = 1$ ，代入 $\hat{y} = 0.24x + \hat{a}$ 中得到 $\hat{a} = 1 - 3 \times 0.24 = 1 - 0.72 = 0.28$ ，故 B 错误；

$$\hat{y} = 0.24x + 0.28, \quad \hat{y}_1 = 0.24 + 0.28 = 0.52, \quad \hat{y}_2 = 0.24 \times 2 + 0.28 = 0.76,$$

$$\hat{y}_3 = 0.24 \times 3 + 0.28 = 1.00, \quad \hat{y}_4 = 0.24 \times 4 + 0.28 = 1.24, \quad \hat{y}_5 = 0.24 \times 5 + 0.28 = 1.48,$$

$$\hat{e}_1 = 0.5 - 0.52 = -0.02, \quad \hat{e}_2 = 0.8 - 0.76 = 0.04, \quad \hat{e}_3 = 1 - 1 = 0, \quad \hat{e}_4 = 1.2 - 1.24 = -0.04, \quad \hat{e}_5 = 1.5 - 1.48 = 0.02,$$

残差 $\hat{e}_i (i=1,2,3,4,5)$ 的最大值 $\hat{e}_2 = 0.04$ 与最小值 $\hat{e}_4 = -0.04$ 之和为 0, 故 C 正确;

$x=6$ 时该商场 5G 手机销量约为 $\hat{y} = 0.24 \times 6 + 0.28 = 1.72$, 故 D 正确.

故选: B.

4. 方程 $\frac{x^2}{m+3} + \frac{y^2}{m-1} = 1$ 表示双曲线的必要不充分条件可以是()

A. $m \in (-3, 1)$ B. $m \in (-3, -1) \cup (-1, 1)$ C. $m \in (-3, +\infty)$ D. $m \in (-3, -1)$

【解答】解: 若方程 $\frac{x^2}{m+3} + \frac{y^2}{m-1} = 1$ 表示双曲线,

则 $(m+3)(m-1) < 0$, 解得: $-3 < m < 1$,

则: 方程 $\frac{x^2}{m+3} + \frac{y^2}{m-1} = 1$ 表示双曲线的必要不充分条件所对应的集合必须真包含 $\{m | -3 < m < 1\}$,

选项故选: C.

5. 执行如图所示的程序框图, 若依次输入 $m = \frac{\ln 2}{2}$, $n = \frac{\ln 3}{3}$, $p = \frac{\ln 5}{5}$, 则输出的结果为()

A. $\frac{\ln 2}{2}$ B. $\frac{\ln 3}{3}$ C. $\frac{\ln 5}{5}$ D. 以上都不对

【解答】解: 根据题意, 该流程图的作用是求出 m 、 n 、 p 中的最小数,

$$: 2^5 > 5^2 \Leftrightarrow \ln 2^5 > \ln 5^2 \Leftrightarrow 5 \ln 2 > 2 \ln 5 \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} > \frac{\ln 5}{5}.$$

$$3^2 > 2^3 \Leftrightarrow \ln 3^2 > \ln 2^3 \Leftrightarrow 2 \ln 3 > 3 \ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{3} > \frac{\ln 2}{2},$$

$\therefore c < a < b$. 故选: C.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 且 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2), \text{ 则 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$$

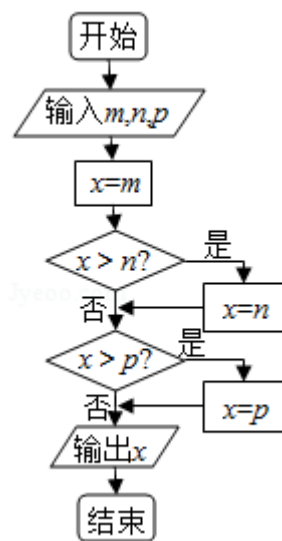
A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. 2 D. -2

【解答】解: $\because \triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3} = \frac{1}{2}ac \sin B$, 可得: $ac \sin B = 2\sqrt{3}$,

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + c^2 - b^2) = \frac{1}{2}ac \sin B \quad \therefore \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \sqrt{3} \quad \therefore B = \frac{\pi}{3} \quad ac = 4$$

又 $\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = ac \cos(\pi - B) = -2$ 故选: D.

7. 设等差数列的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_6 = 36$, $S_{n-6} = 144$, $S_n = 324$, 则 n 的值为()



A. 15

B. 16

C. 17

D. 18

【解答】解：因为等差数列中， $S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 36$ ， $S_{n-6} = 144$ ， $S_n = 324$ ，

则 $S_n - S_{n-6} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} = 180$ ，

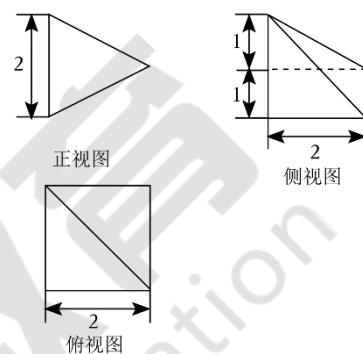
两式相加得， $6(a_1 + a_n) = 216$ ，即 $a_1 + a_n = 36$ ，

因为 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 18n = 324$ ，所以 $n = 18$ 。故选：D。

8. 如图是某四棱锥的三视图，则该四棱锥的高为()

A. 1

B. 2

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 

【解答】解：由题意几何体是四棱锥 $P-ABCD$ ，过 P 作 $PE \perp AD$ 于 E ，

在正方体中有 $CD \perp$ 平面 PAD ，所以 $CD \perp PE$ ，

又因为 $AD \cap CD = D$ ，所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以四棱锥的高为 PE ，

在 $\triangle PAD$ 中， $PA = 2$ ， $PD = \sqrt{5}$ ， $AD = \sqrt{5}$ ，

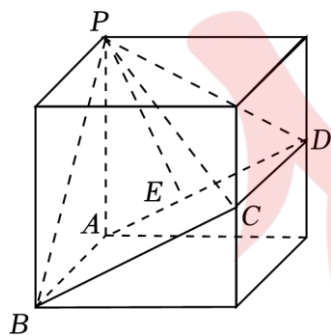
$$\cos \angle ADP = \frac{AD^2 + PD^2 - AP^2}{2AD \cdot PD} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin \angle ADP = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADP} = \frac{4}{5},$$

$$\text{故 } S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2} PE \times \sqrt{5} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{4}{5}, \text{ 解得 } PE = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

所以该四棱锥的高为： $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 。

故选：D。



9. 抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，准线为 l ， A ， B 是抛物线上的两个动点，且满足 $AF \perp BF$ ， P 为线段 AB 的中点，

设 P 在 l 上的射影为 Q ，则 $\frac{|PQ|}{|AB|}$ 的最大值是()

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解答】解：设 $|AF|=a$ ， $|BF|=b$ ， A ， B 在 l 上的射影分别为 M ， N ，则 $|AF|=|AM|$ ， $|BF|=|BN|$ ，

$$\text{故 } |PQ| = \frac{|AM| + |BN|}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

$$\text{又 } AF \perp BF, \text{ 所以 } |AB| = \sqrt{|AF|^2 + |BF|^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

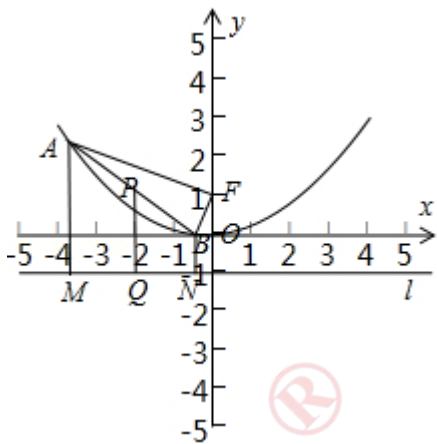
$$\text{因为 } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab, (a+b)^2 - \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2},$$

$$\text{所以 } \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2},$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立，

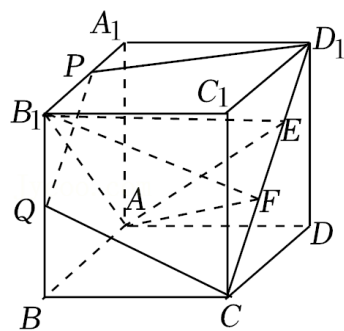
$$\text{故 } \frac{|PQ|}{|AB|} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}} = \frac{a+b}{2 \times \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：C.



10. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，线段 CD_1 上有两个动点 E ， F ，且 $EF=\frac{1}{2}$ ，点 P ， Q 分别为 A_1B_1 ， BB_1 的中点， G 在侧面 CDD_1C_1 上运动，且满足 $B_1G \parallel$ 平面 CD_1PQ ，以下命题错误的是（ ）

- A. $AB_1 \perp EF$
- B. 多面体 $AEFB_1$ 的体积为定值
- C. 侧面 CDD_1C_1 上存在点 G ，使得 $B_1G \perp CD_1$
- D. 直线 B_1G 与直线 BC 所成的角可能为 $\frac{\pi}{6}$



解：对于A，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB_1 \perp A_1B$ ， $A_1B \parallel CD_1$ ， E 、 F 是线段 CD_1 上有两个动点， $\therefore AB_1 \perp EF$ ，

故A正确；

对于B， $\because EF=\frac{1}{2}$ ， B_1 到 EF 的距离为定值， $\therefore S_{\square B_1EF}$ 是定值，

\therefore 点A到平面 B_1EF 的距离为定值， \therefore 多面体 $AEFB_1$ 的体积为定值，故B正确；

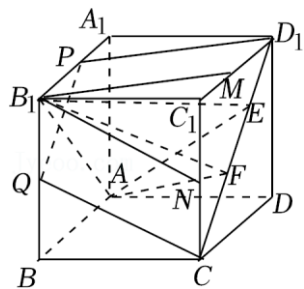
对于 C ， $\because B_1C = B_1D_1$ ， \therefore 当 G 为 CD_1 中点时， $B_1G \perp CD_1$ ，故 C 正确；

对于 D ，取 C_1D_1 中点 M ， CC_1 中点 N ，当 G 与 M 或 N 重合时，

直线 B_1G 与直线 BC 所成的角 $\angle MB_1C_1$ 最大，

$$\tan \angle MB_1C_1 = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6}, \text{ 故 } D \text{ 错误.}$$

故选：D.



11. 已知直线 $l_1: x + y - 4 = 0$ 与圆心为 $M(0,1)$ 且半径为 3 的圆相交于 A, B 两点，直线 $l_2: 2mx + 2y - 3m - 5 = 0$ 与圆 M 交于 C, D 两点，则四边形 $ACBD$ 的面积的值最大是 ()

A. $9\sqrt{3}$

B. $9\sqrt{2}$

C. $6\sqrt{2}$

D. $9(\sqrt{2}+1)$

【解答】解：根据题意，圆 M 的圆心为 $M(0,1)$ 且半径为 3，则圆 M 的方程为 $x^2 + (y-1)^2 = 9$ ，即 $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ ，

直线 $l_1: x + y - 4 = 0$ 与圆 M 相交于 A, B 两点，

则有 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$ ，解可得： $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$ ，即 A, B 的坐标为 $(3,1), (0,4)$ ，

则 $|AB| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ ，且 AB 的中点为 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ ，

直线 $l_2: 2mx + 2y - 3m - 5 = 0$ ，变形可得 $m(2x-3) + 2y - 5 = 0$ ，直线 l_2 恒过定点 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ ，

设 $N(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ ，

当 CD 与 AB 垂直时，四边形 $ACBD$ 的面积最大，

此时 CD 的方程为 $y - \frac{5}{2} = x - \frac{3}{2}$ ，变形可得 $y = x + 1$ ，经过点 $M(0,1)$ ，

则此时 $|CD| = 6$ ，

故 $S_{\text{四边形}ACBD}$ 的最大值 $= S_{\triangle ACB} + S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ ，

故 $S_{\text{四边形}ACBD}$ ， $9\sqrt{2}$ ，故选：B.

12. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有 4 个极值点, 给出下列四个结论:

① $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 3 个不同的零点; ② $f(x)$ 的最小正周期可能是 $\frac{\pi}{2}$;

③ ω 的取值范围是 $\left(\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right]$; ④ $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{23}, \frac{\pi}{19}\right)$ 上单调递增.

其中正确结论的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

12. C 【分析】令 $\omega x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 则 $x = \frac{\pi + 4k\pi}{4\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$, 结合条件可得 $0 < \frac{\pi + 4k\pi}{4\omega} < \pi$ 有 4 个整数 k 符合题意, 可求出 ω 的取值范围, 再利用三角函数图象性质逐项分析即可得出结论.

【详解】由函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$),

令 $\omega x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 可得 $x = \frac{\pi + 4k\pi}{4\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$,

因为 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有 4 个极值点, 即可得 $0 < \frac{\pi + 4k\pi}{4\omega} < \pi$ 有且仅有 4 个整数 k 符合题意,

解得 $0 < \frac{1 + 4k}{4\omega} < 1$, 即 $0 < 1 + 4k < 4\omega$, 可得 $k = 0, 1, 2, 3$,

即 $1 + 4 \times 3 < 4\omega \leq 1 + 4 \times 4$, 解得 $\omega \in \left(\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right]$, 即③正确;

对于①, 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \omega\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, 即可得 $\omega\pi + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$,

显然当 $\omega\pi + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right]$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 3 个不同的零点;

当 $\omega\pi + \frac{\pi}{4} \in \left(4\pi, \frac{9\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且仅有 4 个不同的零点; 即①错误;

对于②, $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega} \in \left[\frac{8\pi}{17}, \frac{8\pi}{13}\right)$, 易知 $\frac{\pi}{2} \in \left[\frac{8\pi}{17}, \frac{8\pi}{13}\right)$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期可能是 $\frac{\pi}{2}$, 即②正确;

对于④, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{23}, \frac{\pi}{19}\right)$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\omega \frac{\pi}{23} + \frac{\pi}{4}, \omega \frac{\pi}{19} + \frac{\pi}{4}\right)$;

由 $\omega \in \left(\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right]$ 可知 $\left(\omega \frac{\pi}{23} + \frac{\pi}{4}, \omega \frac{\pi}{19} + \frac{\pi}{4}\right) \in \left(\frac{9\pi}{23}, \frac{9\pi}{19}\right)$,

由三角函数图象性质可知 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{23}, \frac{\pi}{19}\right)$ 上单调递增, 即④正确;

即可得②③④正确. 故选: C

第 II 卷 (共 90 分)

二、填空题 (本题共 4 道小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若 $(2-i) \cdot z = 3i$, 则 z 的共轭复数为_____

【详解】依题意， $z = \frac{3i}{2-i} = \frac{-3+6i}{5}$

所以 z 的共轭复数为 $\frac{-3-6i}{5}$.

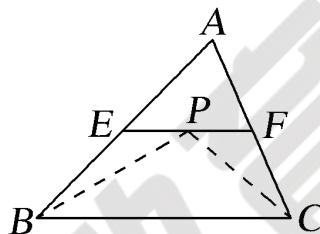
14. 向面积为 2 的 $\triangle ABC$ 内部投掷一点 P ，则 $\triangle PBC$ 的面积小于 1 的概率为_____

【详解】如图所示，取 AB, AC 的中点 E, F ，

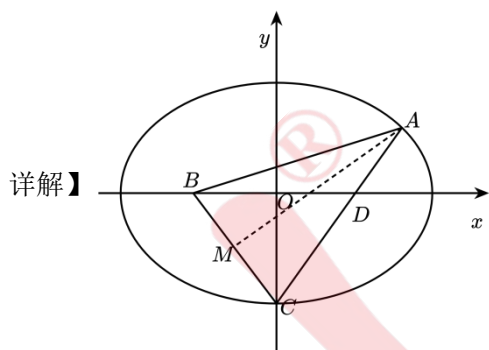
则 EF 为 $\triangle ABC$ 的中位线，当点 P 落在四边形 $EFCB$ 内时 $\triangle PBC$ 的面积小于 1，

已知总事件为 $\triangle ABC$ 的面积 $S=2$ ， $S_{\text{四边形}EFCB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF} = S - \frac{S}{4} = \frac{3S}{4} = \frac{3}{2}$ ，

所以所求事件的概率为 $\frac{S_{\text{四边形}EFCB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{4}$.



15. 已知 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，其中 $AB=AC$ ，点 D 为边 AC 上一点， $\cos B = \frac{1}{3}$. 以点 B, D 为焦点的椭圆 E 经过点 A 与 C ，则椭圆 E 的离心率的值为_____.



连接点 A 与 BC 中点 M ，即有 $BM=CM$ ，由 $AB=AC$ ，故 $AM \perp BC$ ，

由 $\cos \angle ABC = \frac{1}{3}$ ，则 $BM = \frac{1}{3}AB$ ，即 $BC = \frac{2}{3}AB$ ，

由椭圆定义可得 $AB+AD=2a$ 、 $BC+CA=2a$ ，

故 $AB+AD+BC+CA=AB+AC+BC=\frac{8}{3}AB=4a$ ，

即 $AB=\frac{3}{2}a$ ，则 $BC=a$ 、 $CD=2a-a=a$ ，

由 $AB=AC$ 故 $\cos \angle BCA = \cos \angle ABC = \frac{1}{3}$ ，

则 $\cos \angle BCA = \frac{a^2+a^2-4c^2}{2a \times a} = \frac{1}{3}$ ，即 $\frac{2a^2-4c^2}{2a^2} = 1-2e^2 = \frac{1}{3}$ ，

解得 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$ （负值舍去）. 故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. 若函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 与 $g(x) = x^2$ 的图像在实数集 \mathbf{R} 上有且只有 3 个交点，则实数 a 的取值范围为

【详解】即 $a^x = x^2$ 仅有 3 个解，

$x=0$ 显然不是该方程的解，则 $\ln a^x = \ln x^2$ ，即 $\ln a = \frac{\ln x^2}{x}$ 仅有 3 个解，

设 $h(x) = \frac{\ln x^2}{x} (x \neq 0)$ ，定义域关于原点对称，且满足 $h(-x) = \frac{\ln x^2}{-x} = -h(x)$ 。

即 $h(x)$ 为奇函数，

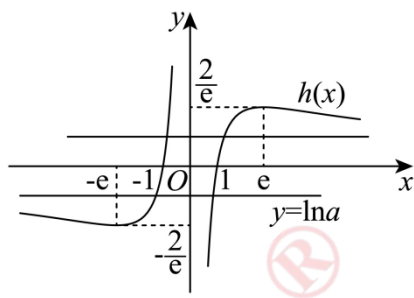
考虑 $x > 0$ 时的情况， $h(x) = \frac{2\ln x}{x}$ ， $h'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$ ，

当 $0 < x < e$ 时， $h'(x) > 0$ ，即 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增，

当 $x > e$ 时， $h'(x) < 0$ ，即 $h(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，

则函数极大值为 $h(e) = \frac{2}{e}$ ，且当 $0 < x < 1$ 时， $h(x) < 0$ ；当 $x > 1$ 时， $h(x) > 0$ ；

结合函数 $h(x)$ 为奇函数，即可作出函数 $h(x)$ 的图象如图示：



由于 $\ln a = \frac{\ln x^2}{x}$ 仅有 3 个解，故 $y = \ln a$ 与函数 $h(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ 的图象仅有 3 个交点，

结合图象可得 $0 < \ln a < \frac{2}{e}$ 或 $-\frac{2}{e} < \ln a < 0$ ，

即 $1 < a < e^{\frac{2}{e}}$ 或 $e^{-\frac{2}{e}} < a < 1$ ，

故答案为： $1 < a < e^{\frac{2}{e}}$ 或 $e^{-\frac{2}{e}} < a < 1$

三、解答题（本题共 6 道小题，共 70 分）

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1 = 1$ ，且满足 $na_{n+1} = (n+1)a_n$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{3n-1}$ 。

（I）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设数列 $\left\{\frac{2^{a_n}}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n 。

【解答】解：（1）证明： $\because na_{n+1} = (n+1)a_n$ ，

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}, \therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1} (n \geq 2),$$

$$\therefore a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = n(n \in \mathbb{N}^*),$$

当 $n=1$ 时，上式成立，

$$\therefore a_n = n(n \in \mathbb{N}^*), \therefore b_n = \frac{1}{3n-1}; \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } \frac{2^{a_n}}{b_n} = 2^n \times (3n-1),$$

$$\therefore T_n = 2 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + 8 \times 2^3 + \cdots + (3n-4) \times 2^{n-1} + (3n-1) \times 2^n \text{ ①},$$

$$\therefore 2T_n = 2 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + 8 \times 2^4 + \cdots + (3n-4) \times 2^n + (3n-1) \times 2^{n+1} \text{ ②},$$

$$\therefore \text{①} - \text{②} \text{ 得, } -T_n = 4 + 3 \times (2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n) - (3n-1) \times 2^{n+1} = 4 + 3 \times \frac{2^2 \times (1-2^{n-1})}{1-2} - (3n-1) \times 2^{n+1} = -8 - (3n-4) \times 2^{n+1},$$

$$\therefore T_n = 8 + (3n-4) \cdot 2^{n+1}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 某企业有甲、乙、丙三个部门，其员工人数分别为 24，16，8. 现在医务室通过血检进行一种流行疾病的检查.

(I) 现采用分层抽样的方法从中抽取 6 人进行前期调查，求甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取的人数和每一位员工被抽到的概率？

(II) 将该企业所有员工随机平均分成 4 组，先将每组的血样混在一起化验，若结果呈阴性，则可断定本组血样全部为阴性，不必再化验；若结果呈阳性，则本组中至少有一人呈阳性，再逐个化验. 已知每组化验结果呈阴性的概率都为 $\frac{1}{2}$ ，记 $B_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为“第 i 组化验结果呈阴性”， $\bar{B}_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为“第 i 组化验结果呈阳性”，请计算恰有两个组需要进一步逐个化验的概率.

【解答】解：(1) 由已知，甲、乙、丙三个部门的员工人数之比为 3:2:1，

由于采用分层抽样的方法从中抽取 6 人，

因此应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取 3 人，2 人，1 人，

该企业总共有 $24+16+8=48$ 名员工，

记事件 A：“任意一位被抽到”，由于每位员工被抽到的概率相等，

$$\therefore \text{每位员工被抽到的概率为 } P = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 记“恰有两个组需要进一步逐个化验”为事件 B，所有分组化验的结果有 16 种，分别为：

$$(B_1, B_2, B_3, B_4), (\bar{B}_1, B_2, B_3, B_4), (B_1, \bar{B}_2, B_3, B_4), (B_1, B_2, \bar{B}_3, B_4), (B_1, B_2, B_3, \bar{B}_4),$$

$$(\bar{B}_1, \bar{B}_2, B_3, B_4), (\bar{B}_1, B_2, \bar{B}_3, B_4), (\bar{B}_1, B_2, B_3, \bar{B}_4), (B_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3, B_4), (B_1, \bar{B}_2, B_3, \bar{B}_4),$$

$$(B_1, B_2, \bar{B}_3, \bar{B}_4), (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3, B_4), (\bar{B}_1, \bar{B}_2, B_3, \bar{B}_4), (\bar{B}_1, B_2, \bar{B}_3, \bar{B}_4), (B_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3, \bar{B}_4),$$

$$(\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3, \bar{B}_4), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

其中，恰有两个组化验结果呈阳性，即需要进一步逐个化验的情况有 6 种，分别为：

$$(\overline{B_1}, \overline{B_2}, B_3, B_4), (\overline{B_1}, B_2, \overline{B_3}, B_4), (\overline{B_1}, B_2, B_3, \overline{B_4}), (B_1, \overline{B_2}, \overline{B_3}, B_4), (B_1, \overline{B_2}, B_3, \overline{B_4}), (B_1, B_2, \overline{B_3}, \overline{B_4}),$$

每组化验结果呈阴性与阳性互为对立，

∴ 每组化验呈阳性的概率都为 $\frac{1}{2}$ ，10 分

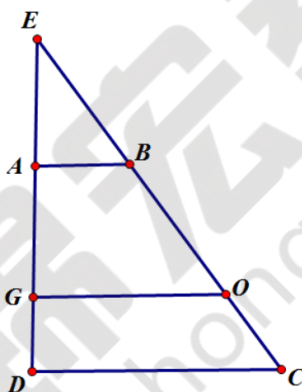
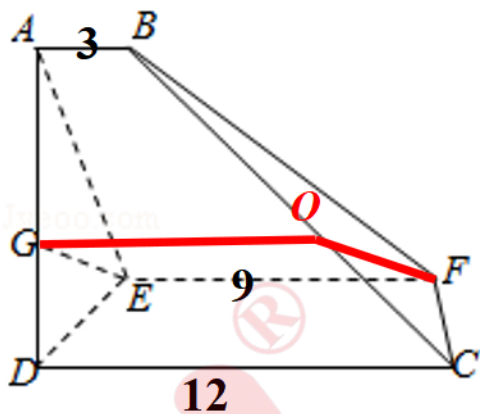
则上述每个结果出现的可能性都相等，

∴ 恰有两个组需要进一步逐个化验的概率为 $P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ 12 分

19. 如图，已知梯形 $CDEF$ 与 $\triangle ADE$ 所在的平面垂直， $AD \perp DE$ ， $CD \perp DE$ ， $AB \parallel CD \parallel EF$ ， $AE = 2DE = 8$ ， $AB = 3$ ， $EF = 9$ ， $CD = 12$ ，连接 BC ， BF 。

(I) 若 G 为 AD 边上一点， $DG = \frac{1}{3}DA$ ，求证： $EG \parallel$ 平面 BCF ；

(II) 求多面体 $ABCDEF$ 的体积。



【解答】(I) 证明：在 BC 上取一点 O ，使得 $BO = 2OC$ 。

延长 DA 和 CB 交于点 E ，由相似三角形原理可得 $GO \parallel DC$ ， $GO = 9$ 。

∵ $GO \parallel FE$ 且 $GO = FE$ ， $GOF E$ 是平行四边形 ∴ $GE \parallel FO$ ∴ $FO \subset$ 面 BCF

∵ $EG \not\subset$ 平面 BCF ，∴ $EG \parallel$ 平面 BCF ；6 分

(II) 解：连接 BD ， BE ，

则 $V_{ABCDEF} = V_{B-CDEF} + V_{B-ADE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (9+12) \times 4 \times 4\sqrt{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} \times 3 = 64\sqrt{3}$ 12 分

20. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，焦距为 2，过 E 的左焦点 F 的直线 l 与 E 相交于 A 、 B 两点，与直线 $x = -2$ 相交于点 M 。

(I) 若 $M(-2, -1)$ ，求证： $|MA| \cdot |BF| = |MB| \cdot |AF|$ ；

(II) 过点 F 作直线 l 的垂线 m 与 E 相交于 C 、 D 两点，与直线 $x = -2$ 相交于点 N 。求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} + \frac{1}{|NC|} + \frac{1}{|ND|}$ 的

最大值.

【详解】(1) 证明：设 $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ ，因为椭圆 E 的焦距为 2，所以 $2c = 2$ ，解得 $c = 1$ 。

又因为椭圆 E 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $a = \sqrt{2}$ ，所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 2 - 1 = 1$ ，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 。

因为直线 l 经过 $M(-2, -1)$ 、 $F(-1, 0)$ ， $k_{MF} = \frac{-1-0}{-2-(-1)} = 1$ ，

所以，直线 l 的方程为 $y = x + 1$ ，

设点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，联立 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$ 可得 $3x^2 + 4x = 0$ ，

由 $3x^2 + 4x = 0$ ，得 $x_1 = -\frac{4}{3}$ ， $x_2 = 0$ 。.....2 分

所以 $|MA| \cdot |BF| = \sqrt{2}|x_1 + 2| \cdot \sqrt{2}|x_2 + 1| = 2 \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{4}{3}$ ，

$|MB| \cdot |AF| = \sqrt{2}|x_2 + 2| \cdot \sqrt{2}|x_1 + 1| = 2 \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ ，

因此， $|MA| \cdot |BF| = |MB| \cdot |AF|$5 分

(2) 证明：若直线 l 、 m 中两条直线分别与两条坐标轴垂直，则其中有一条必与直线 $x = -2$ 平行，不合乎题意，

所以，直线 l 的斜率存在且不为零，设直线 l 方程为 $y = k(x + 1)$ ，

则直线 m 方程为 $y = -\frac{1}{k}(x + 1)$ ，其中 $k \neq 0$ 。

联立 $\begin{cases} y = k(x + 1) \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$ 可得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$ ，

设 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，则 $\Delta = 16k^4 - 8(2k^2 + 1)(k^2 - 1) = 8(k^2 + 1) > 0$ ，

由韦达定理可得 $x_1 + x_2 = -\frac{4k^2}{2k^2 + 1}$ ， $x_1x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}$ ，.....6 分

易知 $x_1 > -2$ 且 $x_2 > -2$ ，将 $x = -2$ 代入直线 l 的方程可得 $y = -k$ ，即点 $M(-2, -k)$ ，

所以 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}|x_1+2|} + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}|x_2+2|}$
 $= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left(\frac{1}{x_1+2} + \frac{1}{x_2+2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$
 $= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{-\frac{4k^2}{1+2k^2}+4}{\frac{2k^2-2}{1+2k^2}+\frac{-8k^2}{1+2k^2}+4} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{4k^2+4}{2k^2+2} = \frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$ ，.....8 分

同理可得 $\frac{1}{|NC|} + \frac{1}{|ND|} = \frac{2}{\sqrt{1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}} = \frac{2|k|}{\sqrt{1+k^2}}$ ，.....9 分

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} + \frac{1}{|NC|} + \frac{1}{|ND|} &= \frac{2(1+|k|)}{\sqrt{1+k^2}} = 2\sqrt{\frac{k^2+1+2|k|}{k^2+1}} = 2\sqrt{1+\frac{2}{|k|+\frac{1}{|k|}}} \\ &\leq 2\sqrt{1+\frac{2}{2\sqrt{|k|\cdot\frac{1}{|k|}}}} = 2\sqrt{2}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分} \end{aligned}$$

当且仅当 $k = \pm 1$ 时，等号成立，

因此， $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} + \frac{1}{|NC|} + \frac{1}{|ND|}$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$ 12 分

21. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 1$, $g(x) = \ln x + a$ ($a \in \mathbb{R}$).

(I) 若 $a = 1$, $f(x) > g(x)$ 在区间 $(0, t)$ 上恒成立，求实数 t 的取值范围；

(II) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有公切线，求实数 a 的取值范围.

【详解】(1) 由题意，当 $a = 1$ 时，设 $h(x) = f(x) - g(x)$,

则 $h(x) = x^2 - x + 1 - \ln x - 1 = x^2 - x - \ln x$ ($x > 0$),

$$h'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

令 $h'(x) = 0$ ，得 $x = 1$ (舍负)

$h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

$$\therefore h(x)_{\min} = h(1) = 0 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

根据题意 t 的取值范围为 $(0, 1]$ 4 分

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处与函数 $g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处有相同的切线，

$$\text{则 } f'(x_1) = g'(x_2) = \frac{f(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}, \therefore 2x_1 - a = \frac{1}{x_2} = \frac{x_1^2 - ax_1 + 1 - \ln x_2 - a}{x_1 - x_2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2x_2} + \frac{a}{2}, \text{ 代入 } \frac{x_1 - x_2}{x_2} = x_1^2 - ax_1 + 1 - \ln x_2 - a$$

$$\text{得 } \frac{1}{4x_2^2} + \frac{a}{2x_2} + \ln x_2 + \frac{a^2}{4} + a - 2 = 0.$$

\therefore 问题转化为：关于 x 的方程 $\frac{1}{4x^2} + \frac{a}{2x} + \ln x + \frac{a^2}{4} + a - 2 = 0$ 有解，6 分

设 $F(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{a}{2x} + \ln x + \frac{a^2}{4} + a - 2$ ($x > 0$)，则函数 $F(x)$ 有零点，

$$\therefore F(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + a \right)^2 + \ln x + a - 2, \text{ 当 } x = e^{2-a} \text{ 时,}$$

$$\ln x + a - 2 = 0, \therefore F(e^{2-a}) > 0.$$

\therefore 问题转化为： $F(x)$ 的最小值小于或等于 0.....7 分

$$F'(x) = -\frac{1}{2x^3} - \frac{a}{2x^2} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - ax - 1}{2x^3},$$

$$\text{设 } 2x_0^2 - ax_0 - 1 = 0 (x_0 > 0), \text{ 则}$$

$$\text{当 } 0 < x < x_0 \text{ 时, } F'(x) < 0, \text{ 当 } x > x_0 \text{ 时, } F'(x) > 0.$$

$\therefore F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore F(x) \text{ 的最小值为 } F(x_0) = \frac{1}{4x_0^2} + \frac{a}{2x_0} + \ln x_0 + \frac{a^2}{4} + a - 2 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{由 } 2x_0^2 - ax_0 - 1 = 0 \text{ 知 } a = 2x_0 - \frac{1}{x_0}, \text{ 故 } F(x_0) = x_0^2 + 2x_0 - \frac{1}{x_0} + \ln x_0 - 2.$$

$$\text{设 } \varphi(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{x} + \ln x - 2 (x > 0), \text{ 则 } \varphi'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} > 0,$$

$$\text{故 } \varphi(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, } \therefore \varphi(1) = 0, \therefore \text{当 } x \in (0, 1] \text{ 时, } \varphi(x) \leq 0,$$

$$\therefore F(x) \text{ 的最小值 } F(x_0) \leq 0 \text{ 等价于 } 0 \leq x_0 \leq 1 \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \because \text{函数 } y = 2x - \frac{1}{x} \text{ 在 } (0, 1] \text{ 上单调递增, } \therefore a = 2x_0 - \frac{1}{x_0} \in (-\infty, 1] \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22. \text{ 在直角坐标系 } xOy \text{ 中, 曲线 } C \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} \\ y = \frac{2\sqrt{3}t}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \text{ 以坐标原点 } O \text{ 为极点, } x \text{ 轴的正半轴为}$$

$$\text{极轴建立极坐标系, 直线 } l \text{ 的极坐标方程 } \sqrt{3}\rho \cos \theta - \rho \sin \theta - \sqrt{3} = 0.$$

(I) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(II) $\theta \in [0, 2\pi)$, 直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 求 M, N 两点的极坐标

$$\text{【详解】(1) 方法一: 曲线 } C: \text{由题意得 } x = -2 + \frac{4}{1+t^2}, \text{ 即 } x+2 = \frac{4}{1+t^2}, \therefore t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{y}{x+2},$$

$$\text{然后代入 } x+2 = \frac{4}{1+t^2}, \text{ 即可得到曲线 } C \text{ 的普通方程 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq -2), \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

备注: 若没有扣点, 则扣 1 分

$$\text{而直线 } l, \text{ 将 } x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta \text{ 代入其极坐标方程即可得其直角坐标方程 } \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0.$$

.....2 分

方法二：因为 $3x^2 + 4y^2 = \frac{12(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + \frac{48t^2}{(1+t^2)^2} = 12 \times \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2} = 12$,

所以 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq -2)$, 直线 l 的直角坐标方程为: $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$;

方法三：由万能公式: $\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}, \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$,

令 $t = \tan^2 \frac{\theta}{2}$, 则有 $x = 2 \cos \theta, y = \sqrt{3} \sin \theta$,

由椭圆的常用参数方程可得: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq -2)$,

直线 l 的方程为: $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$.

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \\ y = \sqrt{3}(x-1) \end{cases}$ 得 $5y^2 + 2\sqrt{3}y - 9 = 0$.

解得 $y_1 = -\sqrt{3}, y_2 = \frac{3\sqrt{3}}{5}$, M 点的坐标为 $(0, -\sqrt{3})$, N 点的坐标为 $(\frac{8}{5}, \frac{3\sqrt{3}}{5})$ 6 分

所以 M 点的极坐标为 $(\sqrt{3}, \frac{3\pi}{2})$, 8 分

N 点的极径为 $\frac{\sqrt{91}}{5}$ 10 分

23. 已知函数 $f(x) = |2x+3| + |2x-2|$, $g(x) = \sin 2x$.

(I) 求函数 $f(x) + g(x)$ 的最小值;

(II) 设 $a, b \in (-1, 1)$, 求证: $|2a+1| - |1-2b| < |2ab+2|$.

【详解】(1) 由题设 $f(x) = \begin{cases} -4x-1, & x \leq -\frac{3}{2} \\ 5, & -\frac{3}{2} < x \leq 1 \\ 4x+1, & x > 1 \end{cases}$, 2 分

而 $g(x) = \sin 2x$ 在 $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ 、 $(-\frac{3}{2}, 1]$ 、 $(1, +\infty)$ 上均能取到最小值 -1, 3 分

对于 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ 上递减, $(-\frac{3}{2}, 1]$ 上为常数, $(1, +\infty)$ 上递增, 且连续,

所以 $f(x) + g(x)$ 的最小值在 $(-\frac{3}{2}, 1]$ 上取得, 即 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, 最小值为 4 5 分

(2) 由 $|2a+1|-|1-2b| \leq |2a+1-1+2b| = 2|a+b|$, 仅当 $(2a+1)(1-2b) \geq 0$ 取等号,7 分

要证 $|2a+1|-|1-2b| < |2ab+2|$, 即证 $|a+b| < |ab+1|$, 则 $(a+b)^2 < (ab+1)^2$,

需证 $(ab)^2 - a^2 - b^2 + 1 = (a^2 - 1)(b^2 - 1) > 0$, 而 $a, b \in (-1, 1)$, 即 $a^2, b^2 \in [0, 1)$,

所以 $(a^2 - 1)(b^2 - 1) > 0$ 恒成立, 故 $|2a+1|-|1-2b| < |2ab+2|$ 得证.....10 分

备注：此题可用其它方法证明



锦宏教育
Jinhong Education