

成都市 2021 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题, 共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分, 共 60 分)

1. B; 2. C; 3. B; 4. C; 5. A; 6. A; 7. D; 8. B; 9. C; 10. D; 11. C; 12. D.

第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分, 共 20 分)

13. 三棱柱, 三棱锥, 圆锥等(其他正确答案同样给分); 14. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$;15. $8\sqrt{3}$;

16. ②③④.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) 设转换公式中转换分 y 关于原始成绩 x 的一次函数关系式为 $y = ax + b$.

$$\text{则 } \begin{cases} 78 = 84a + b, \\ 71 = 78a + b, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{7}{6}, \\ b = -20. \end{cases} \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

 $\therefore$ 转换分的最高分为 85,

$$\therefore 85 = \frac{7}{6}x - 20. \text{ 解得 } x = 90.$$

故该市本次化学原始成绩 B 等级中的最高分为 90 分. \dots\dots 6 \text{ 分}(II) $\therefore 10(0.005 + 0.010 + 0.012 + 0.015 + 0.033 + a) = 1$,

$$\therefore a = 0.025. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

设化学原始成绩 B 等级中的最低分为 x ,

$$\therefore 10 \times 0.010 + 10 \times 0.015 + 10 \times 0.025 = 0.5,$$

$$\therefore x = 70.$$

综上, 化学原始成绩 B 等级中的最低分为 70. \dots\dots 12 \text{ 分}18. 解:(I) 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1(2) = 0$. \dots\dots 1 \text{ 分}

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n(2) - S_{n-1}(2) = (2 + 2^2 + \dots + 2^n - 2) - (2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} - 2) = 2^n. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

又当 $n = 1$ 时, $a_1 = 0$ 不满足上式,

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ 2^n, & n \geq 2. \end{cases} \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(II) \therefore S_{2024}(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2024} - 2,$$

$$\therefore S'_{2024}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2024x^{2023}. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$S'_{2024}(2) = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + 2024 \times 2^{2023} \quad \dots\dots ①,$$

$$2S'_{2024}(2) = 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + 2024 \times 2^{2024} \quad \dots\dots ②,$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ 得, } -S'_{2024}(2) = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2 + \cdots + 1 \times 2^{2023} - 2024 \times 2^{2024} \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$= \frac{1-2^{2024}}{1-2} - 2024 \times 2^{2024} = -2023 \times 2^{2024} - 1. \cdots \cdots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore S'_{2024}(2) = 2023 \times 2^{2024} - 1. \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (I) 在 $\triangle PBA$ 中, $\because M, N$ 是棱 PB, AB 的中点,

$\therefore MN \parallel PA$. 同理可得 $EF \parallel PA$. $\cdots \cdots 3 \text{ 分}$

$\therefore MN \parallel EF$.

$\therefore M, N, E, F$ 四点共面. $\cdots \cdots 5 \text{ 分}$

(II) 连接 NF .

由 (I), $MN = EF = \frac{1}{2}PA$,

$\therefore$ 四边形 $MNEF$ 为平行四边形.

$\therefore V_{P-MNEF} = 2V_{P-NFE} = 2V_{N-PEF} = V_{B-PEF}$. $\cdots \cdots 8 \text{ 分}$

$\because$ 四面体 $P-ABC$ 为正四面体,

$\therefore B$ 在底面 PAC 内的射影 O 为 $\triangle PAC$ 的中心. $\cdots \cdots 9 \text{ 分}$

$$\therefore OP = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{在 } \triangle PBO \text{ 中, } BO = \sqrt{PB^2 - PO^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore V_{B-PEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle PEF} \cdot BO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$\therefore V_{P-MNEF} = \frac{\sqrt{2}}{6}. \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (I) 设 $M(x_1, y_1), S(x_1, -y_1)$.

$$\therefore k_{AM} = \frac{y_1}{x_1 + a}, k_{BS} = \frac{-y_1}{x_1 - a}, \cdots \cdots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore k_{AM} \cdot k_{BS} = \frac{y_1}{x_1 + a} \cdot \frac{-y_1}{x_1 - a} = \frac{-y_1^2}{x_1^2 - a^2}. \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$\because M(x_1, y_1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1 (a > 0)$ 上,

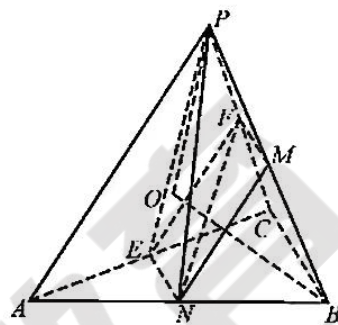
$$\therefore k_{AM} \cdot k_{BS} = \frac{-y_1^2}{x_1^2 - a^2} = \frac{-5(\frac{x_1^2}{a^2} - 1)}{x_1^2 - a^2} = -\frac{5}{a^2} = -\frac{5}{4}, \text{ 解得 } a = 2. \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{双曲线 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1. \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

(II) 设 $N(x_2, y_2)$, 直线 $MN: x = my + 3$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 3, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (5m^2 - 4)y^2 + 30my + 25 = 0.$$

$$m \neq \pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \Delta = 400(m^2 + 1) > 0.$$



$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{-30m}{5m^2 - 4}, y_1 y_2 = \frac{25}{5m^2 - 4}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } BM: y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2),$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 解得 } y_F = \frac{-y_1}{x_1 - 2}. \text{ 同理可得 } y_G = \frac{-y_2}{x_2 - 2}. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{以 } PQ \text{ 为直径的圆的方程为 } (x - 1)(x - 1) + (y + \frac{y_1}{x_1 - 2})(y + \frac{y_2}{x_2 - 2}) = 0, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } (x - 1)^2 + \frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \therefore (x - 1)^2 + \frac{y_1 y_2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} &= (x - 1)^2 + \frac{y_1 y_2}{(my_1 + 1)(my_2 + 1)} \\ &= (x - 1)^2 + \frac{25}{5m^2 - 4} \\ &= (x - 1)^2 + \frac{25}{m^2 \cdot \frac{25}{5m^2 - 4} + m \cdot \frac{-30m}{5m^2 - 4} + 1} \\ &= (x - 1)^2 + \frac{25}{25m^2 - 30m^2 + 5m^2 - 4} \\ &= (x - 1)^2 - \frac{25}{4} = 0. \quad \dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\therefore (x - 1)^2 = \frac{25}{4}, \text{ 解得 } x = -\frac{3}{2} \text{ 或 } x = \frac{7}{2}.$$

$$\therefore \text{以 } PQ \text{ 为直径的圆恒过点 } (-\frac{3}{2}, 0), (\frac{7}{2}, 0). \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{ 解: (I) } \because f'(x) = e^{x-1} + \frac{2}{(x+1)^2}. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \text{ 时, } f'(x) > 0.$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 在 } (-\infty, -1), (-1, +\infty) \text{ 上单调递增; } \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{当 } x \in (-\infty, -1) \text{ 时, } f(x) > 0; \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x \in (-1, +\infty) \text{ 时, } f(1) = 0. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \text{ 上有且仅有一个零点; } \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(II) \because af(x) \leq \frac{e^x}{e} + \ln x - 1,$$

$$\therefore a(\frac{e^x}{e} - \frac{2}{x+1}) - \frac{e^x}{e} - \ln x + 1 \leq 0.$$

$$\text{设 } g(x) = a(\frac{e^x}{e} - \frac{2}{x+1}) - \frac{e^x}{e} - \ln x + 1 = (a-1)e^{x-1} - \ln x - \frac{2a}{x+1} + 1.$$

$$(i) \text{ 当 } a > 1 \text{ 时, 由 } x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty, \text{ 不合题意,}$$

$$\therefore \text{当 } a > 1 \text{ 时, 不合题意. } \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(ii) \text{ 当 } a \leq 1 \text{ 时, 由 (I) } f(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上单调递增.}$$

又 $f(1)=0$, $\therefore f(x) \geq 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立.8 分

$$\therefore g(x) = a\left(\frac{e^x}{e} - \frac{2}{x+1}\right) - \frac{e^x}{e} - \ln x + 1 \leq \frac{e^x}{e} - \frac{2}{x+1} - \frac{e^x}{e} - \ln x + 1$$

$$= -\frac{2}{x+1} - \ln x + 1. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{设 } n(x) = -\frac{2}{x+1} - \ln x + 1.$$

$$\therefore n'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{2x - (x+1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{-(x^2+1)}{x(x+1)^2}.$$

$\therefore n'(x) < 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立, $\therefore n(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减.

又 $n(1)=0$, $\therefore n(x) < 0$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上恒成立.

$$\therefore a\left(\frac{e^x}{e} - \frac{2}{x+1}\right) \leq e^{x-1} + \ln x - 1. \text{ 满足题意.}$$

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$12 分

22. 解: (I) 由曲线 C 的参数方程可得 $(x-2)^2 + y^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$,1 分

化简得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$3 分

(II) 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta + 3 = 0$5 分

设 $A(\rho_1, \theta_1)$, $B(\rho_1, \theta_1 + \frac{\pi}{2})$, $M(\rho, \theta)$6 分

$$\therefore \rho = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho_1, \theta = \theta_1 + \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \rho_1 = \sqrt{2}\rho, \theta_1 = \theta - \frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore (\sqrt{2}\rho)^2 - 4 \times \sqrt{2}\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + 3 = 0.$$

$$\therefore M \text{ 的轨迹的极坐标方程为 } \rho^2 - 2\sqrt{2}\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \frac{3}{2} = 0. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 解: (I) $\because |x+a|+b < 4$, 易知 $4-b > 0$,

$$\therefore b-a-4 < x < 4-a-b. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$\therefore f(x) < 4$ 的解集为 $\{x | 0 < x < 6\}$,

$$\therefore \begin{cases} b-a-4=0, \\ 4-a-b=6 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=-3, \\ b=1. \end{cases} \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 由 (I) 得 $f(x) = |x-3|+1$,

$\therefore f(x)$ 的最小值为 1, 即 $m+2n+3p=1$6 分

$$\therefore \frac{1}{m+2p} + \frac{1}{2n+p} = \left(\frac{1}{m+2p} + \frac{1}{2n+p}\right)(m+2p+2n+p) = 1+1+\frac{2n+p}{m+2p} +$$

$$\frac{m+2p}{2n+p} \geq 4. \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

当且仅当 $m+2p=2n+p=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立.

$$\therefore \frac{1}{m+2p} + \frac{1}{2n+p} \text{ 的最小值为 } 4. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$