

宜宾市普通高中 2021 级第二次诊断性测试

理科数学

(考试时间:120 分钟 全卷满分:150 分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上,并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目,在规定的位置贴好条形码。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将答题卡交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项符合要求。

- 已知集合 $A = \{x | x^2 - 9 < 0\}$, $B = \{x | -1 < x < 4\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{x | -3 < x < 4\}$ B. $\{x | -1 < x < 3\}$ C. $\{x | -3 < x < -1\}$ D. $\{x | -1 < x < 4\}$
- 命题“ $\forall x > 1, \ln x > 0$ ”的否定是
 A. $\forall x > 1, \ln x < 0$ B. $\forall x > 1, \ln x \leq 0$
 C. $\exists x > 1, \ln x \leq 0$ D. $\exists x \leq 1, \ln x \leq 0$
- 已知向量 $a = (1, 2)$, $b = (3, 1)$, 向量 c 满足 $c \perp a, a \parallel (c + b)$, 则 $c =$
 A. $(-2, -1)$ B. $(2, -1)$ C. $(-2, 1)$ D. $(2, 1)$
- 根据调查统计,某市未来新能源汽车保有量基本满足模型 $y = \frac{N}{1 + (\frac{N}{y_0} - 1)e^{-px}}$, 其中 y (单位:万辆)为第 x 年底新能源汽车的保有量, p 为年增长率, N 为饱和度, y_0 为初始值。若该市 2023 年底的新能源汽车保有量是 20 万辆,以此为初始值,以后每年的增长率为 12%,饱和度为 1300 万辆,那么 2033 年底该市新能源汽车的保有量约为(结果四舍五入保留整数,参考数据: $\ln 0.887 \approx -0.12, \ln 0.30 \approx -1.2$)
 A. 65 万辆 B. 64 万辆 C. 63 万辆 D. 62 万辆
- 已知 $a = -\log_5 \frac{1}{3}, b = 5^{0.3}, c = \log_6 2$, 则
 A. $c < a < b$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $a < b < c$
- 若 $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) =$
 A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$
- 为确保马拉松赛事在某市顺利举行,组委会在沿途一共设置了 7 个饮水点,每两个饮水点中间再设置一个服务站,一共 6 个服务站。由含甲、乙在内的 13 支志愿者服务队负责这 13 个站点的服务工作,每一个站点有且仅有一支服务队负责服务,则甲队和乙队在不同类型的站点服务且

不相邻的概率为

- A. $\frac{2}{13}$ B. $\frac{3}{13}$ C. $\frac{4}{13}$ D. $\frac{5}{13}$

8. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2, a_2=1$, 且满足 $a_{n+2}+a_n=a_{n+1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 2024 项的和为

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

9. 已知点 P 是直线 $x+y+3=0$ 上一动点, 过点 P 作圆 $C: (x+1)^2+y^2=1$ 的两条切线, 切点为 A, B , 则弦 AB 长度的最小值为

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

10. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, O 是坐标原点, P 是渐近线 $l: y = -\frac{b}{a}x$ 上位于第二象限的点, 若 $|OP| = a$, $\cos \angle F_2PO = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则双曲线 C 的离心率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

11. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, 点 E, F 分别为棱 PA 和 PB 中点, 则四棱锥 $P-CDEF$ 和四棱锥 $P-ABCD$ 的体积之比为

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{4}{9}$

12. 已知不等式 $axe^x + x > 1 - \ln x$ 有解, 则实数 a 的取值范围为

- A. $(-\frac{1}{e^2}, +\infty)$ B. $(-\frac{1}{e}, +\infty)$ C. $(-\infty, \frac{1}{e^2})$ D. $(-\infty, \frac{1}{e})$

二、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知复数 $z = \frac{1-i}{1+i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $|z| =$ _____.

14. 数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=1, a_3=7$, 数列 $\{\log_2(a_n+1)\}$ 为等差数列, 则 $S_5 =$ _____.

15. 所有棱长均为 6 的三棱锥, 其外接球和内切球球面上各有一个动点 M, N , 则线段 MN 长度的最大值为 _____.

16. 已知 F 为抛物线 $C: x^2 = -8y$ 的焦点, 过直线 $l: y = 4$ 上的动点 M 作抛物线的切线, 切点分别是 P, Q , 则 $\triangle PQO$ 与 $\triangle QFO$ (O 为坐标原点) 面积之和的最小值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17-21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必做题: 共 60 分.

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 在下面三个条件中任选一个作为条件, 解答下列问题. 三个条件为:

① $2b\cos A = c\cos A + a\cos C$; ② $a\sin B = \sqrt{3}b\cos A$;

③ $\cos C + (\cos B - \sqrt{3}\sin B)\cos A = 0$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a = \sqrt{7}, b + c = 4$, 求 bc 的值.

18. (12分)

为了加强企业文化建设,某公司组织了一次趣味答题比赛,题目分为生活和文化两大类,比赛规则如下:

- (i) 选手在每个类别中回答5道题目,每个类别中答对3道及以上为合格;
- (ii) 第一个类别答完5道题并且合格后可以进入下一个类别,否则该选手结束比赛;
- (iii) 选手进入第二个类别后再回答5道题,无论答对与否均结束比赛.

若选手甲在生活类答题比赛中每道题目答对的概率都是0.5.

(1) 求选手甲参加生活类答题合格的概率;

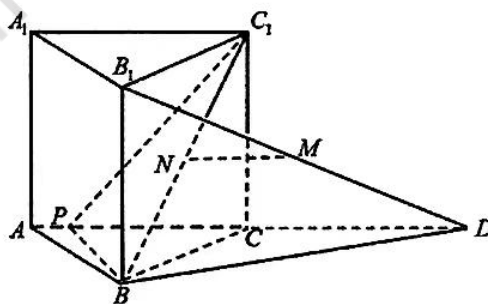
(2) 已知选手甲参加文化类答题合格的概率为0.4. 比赛规定每个类别答题合格得5分,不合格得0分. 设累计得分为 X ,为使累计得分 X 的期望最大,选手甲应选择先进行哪个类别的答题比赛(每个类别合格的概率与次序无关),并说明理由.

19. (12分)

如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,延长 AC 至 D ,使 $AC=CD$,连接 B_1D , M, N 分别是 B_1D, BC_1 的中点,动点 P 在直线 AD 上, $AB=AA_1=2$.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 试确定点 P 位置,使二面角 $C-BC_1-P$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.



20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上下顶点分别为 B_1, B_2 , 左右顶点分别为 A_1, A_2 , 四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的面积为 $6\sqrt{5}$, 若椭圆 C 上的点到右焦点距离的最大值和最小值之和为6.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $(-1, 0)$ 且斜率不为0的直线 l 与 C 交于 P, Q (异于 A_1, A_2)两点, 设直线 A_2P 与直线 A_1Q 交于点 M , 探究三角形 B_1B_2M 的面积是否为定值, 请说明理由.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x + ax + b, a, b \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递增函数, 求 a 的取值范围;

(2) 当 a, b 满足什么条件时, $f(x) + \sin x > 0$ 恒成立.

(二) 选做题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系中, 点 P 是曲线 $C_1: \begin{cases} x = 3 + 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ (t 为参数) 上的动点, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 以极点 O 为中心, 将线段 OP 逆时针旋转 90° 得到 OQ , 设点 Q 的轨迹为曲线 C_2 .

(1) 求曲线 C_1, C_2 的极坐标方程;

(2) 在极坐标系中, 点 M 的坐标为 $(8, \frac{\pi}{2})$, 射线 $l: \theta = \frac{\pi}{3} (\rho > 0)$ 与曲线 C_1, C_2 分别交于 A, B 两点, 求 $\triangle MAB$ 的面积.

23. (10分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = |2x + 1| + 2|x - 2|$.

(1) 若对任意 $x \in \mathbb{R}$, 不等式 $f(x) \geq |m - 1| + |m + 2|$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 的最小值为 n , 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 满足 $5a^2 + 3b^2 + 2c^2 = 2n$, 求证: $|5a + 3b + 2c| \leq 10$.