

理科数学参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	C	B	A	D	D	A	B	D	C	A

13. 1 14. 57 15. $2\sqrt{6}$ 16. $16\sqrt{3}$ 12. 解: $axe^x + x + \ln x > 1$, 即 $axe^x + \ln(xe^x) > 1$,令 $t = xe^x, x > 0, \therefore t \in (0, +\infty)$. 故 $at + \ln t > 1 (t > 0)$ 有解, 即 $a > \frac{1 - \ln t}{t} (t > 0)$ 有解.令 $f(t) = \frac{1 - \ln t}{t} (t > 0), f'(t) = \frac{\ln t - 2}{t^2} (t > 0)$ 当 $t \in (0, e^2), f'(t) < 0; t \in (e^2, +\infty), f'(t) > 0$;即 $f(t)$ 在 $t \in (0, e^2)$ 单减, $f(t)$ 在 $t \in (e^2, +\infty)$ 单增, $\therefore f(t)_{\min} = f(e^2) = -\frac{1}{e^2}$ $\therefore a > -\frac{1}{e^2}$ 16. 解: 根据题意直线 PQ 斜率存在, 设其方程为 $y = kx + m$, 设 $P(x_1, -\frac{x_1^2}{8}), Q(x_2, -\frac{x_2^2}{8})$,由 $x^2 = -8y$, 得 $y = -\frac{x^2}{8}$, 求得 $y' = -\frac{x}{4}$,则抛物线在点 P 处的切线方程为 $y + \frac{x_1^2}{8} = -\frac{x_1}{4}(x - x_1)$, 整理得: $y = -\frac{x_1}{4}x + \frac{x_1^2}{8}$,同理得抛物线在点 Q 处的切线方程为 $y = -\frac{x_2}{4}x + \frac{x_2^2}{8}$,则由 $\begin{cases} y = -\frac{x_1}{4}x + \frac{x_1^2}{8} \\ y = -\frac{x_2}{4}x + \frac{x_2^2}{8} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = -\frac{x_1 x_2}{8} \end{cases}$, 即两切线的交点 $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, -\frac{x_1 x_2}{8})$,由 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 = -8y \end{cases}$ 消去 y 整理得 $x^2 + 8kx + 8m = 0$, 则 $x_1 + x_2 = -8k, x_1 x_2 = 8m$, 则 $M(-4k, -m)$, $\therefore$ 点 M 在直线 $y = 4$ 上, 则 $m = -4, x_1 x_2 = -32$ 则直线 PQ 的方程为 $y = kx - 4$, 过定点 $G(0, -4)$,设 $x_1 < 0$, 则 $x_2 > 0$, 则 $S_{\triangle PQO} + S_{\triangle QFO} = \frac{1}{2}|OG|x_2 - \frac{1}{2}|OG|x_1 + \frac{1}{2}|OF|x_2$, $= 2(x_2 - x_1) + x_2 = 3x_2 - 2x_1 \geq 2\sqrt{-2x_1 \cdot 3x_2} = 2\sqrt{-6 \times -32} = 16\sqrt{3}$,当且仅当 $3x_2 = -2x_1$, 即 $x_1 = -4\sqrt{3}, x_2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, 时等号成立,则 $\triangle PQO$ 与 $\triangle QFO$ 的面积之和的最小值为 $16\sqrt{3}$.(方法二: 可以直接设切点弦方程 $xx_0 = p(y + y_0)$ 恒过定点 $G(0, -4)$, 以下同方法一)

17. 解: (1) 若选①

 $\therefore 2b\cos A = c\cos A + a\cos C$ 由正弦定理得 $2\sin B\cos A = \sin C\cos A + \sin A\cos C$ $\therefore 2\sin B\cos A = \sin(A + C) = \sin(\pi - B) = \sin B$ $\therefore B \in (0, \pi) \therefore \sin B \neq 0$ $\therefore \cos A = \frac{1}{2}$ $\therefore A \in (0, \pi) \therefore A = \frac{\pi}{3}$ 6 分

若选②

$$\because a \sin B = \sqrt{3} b \cos A,$$

由正弦定理得 $\sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B \cos A$

$$\because B \in (0, \pi) \quad \therefore \sin B \neq 0$$

$$\therefore \tan A = \sqrt{3}$$

$$\because A \in (0, \pi) \quad \therefore A = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

若选③

$$\because \cos C + (\cos B - \sqrt{3} \sin B) \cos A = 0$$

$$\therefore \cos(\pi - (A + B)) + (\cos B - \sqrt{3} \sin B) \cos A = 0$$

$$\therefore -\cos A \cos B + \sin A \sin B + \cos B \cos A - \sqrt{3} \sin B \cos A = 0$$

$$\therefore \sin A \sin B - \sqrt{3} \sin B \cos A = 0$$

$$\because B \in (0, \pi) \quad \therefore \sin B \neq 0$$

$$\therefore \tan A = \sqrt{3}$$

$$\because A \in (0, \pi) \quad \therefore A = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 由余弦定理及 (1) 得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\therefore a^2 = (b + c)^2 - 3bc$$

$$\because a = \sqrt{7}, b + c = 4$$

$$\therefore 7 = 16 - 3bc$$

$$\therefore bc = 3 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 由题意得选手甲参加生活类答题合格的概率为:

$$C_3^0 0.5^3 + C_3^1 0.5^3 + C_3^2 0.5^3 = (10 + 5 + 1) \times 0.5^3 = 2^3 \times 0.5^3 = 0.5. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 选手甲应选择先进行生活类答题, 理由如下:

由题意, 若选手甲先参加生活类答题, 则 X 的所有可能取值为 0, 5, 10,

$$\text{则 } P(X=0) = 1 - 0.5 = 0.5; P(X=5) = 0.5 \times (1 - 0.4) = 0.3; P(X=10) = 0.5 \times 0.4 = 0.2,$$

所以累计得分 X 的期望 $E(X) = 0 \times 0.5 + 5 \times 0.3 + 10 \times 0.2 = 3.5$;

若选手甲先参加文化类答题, 则 X 的所有可能取值为 0, 5, 10,

$$\text{则 } P(X=0) = 1 - 0.4 = 0.6; P(X=5) = 0.4 \times (1 - 0.5) = 0.2; P(X=10) = 0.4 \times 0.5 = 0.2,$$

所以累计得分 X 的期望 $E(X) = 0 \times 0.6 + 5 \times 0.2 + 10 \times 0.2 = 3 < 3.5$,

所以为使累计得分的期望最大, 选手甲选择先进行生活类答题. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. 解: (1) 直线 $MN \parallel$ 平面 ABC . 证明如下: 连接 B_1C , 如图所示,

$\because N$ 是 BC_1 的中点,

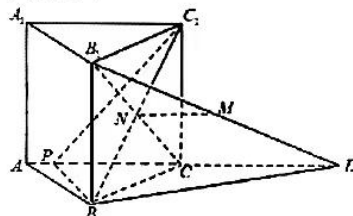
$\therefore N$ 是 B_1C 与 BC_1 的交点,

又 $\because M$ 是 B_1D 的中点,

$\therefore MN$ 是 $\triangle B_1CD$ 的中位线, 则 $MN \parallel CD$,

$\because CD \subset$ 平面 ABC , $MN \not\subset$ 平面 ABC ,

$\therefore$ 直线 $MN \parallel$ 平面 ABC . $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$



(2) 依题意, 取 AC 中点 O , 取 A_1C_1 中点 O_1 , OB, OC, OO_1 两两垂直, 所以以 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系, 如图所示,

$$\text{则 } B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), D(0, 3, 0), C_1 = (0, 1, 2), P(0, t, 0).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{BC_1} = (-\sqrt{3}, 1, 2), \overrightarrow{BP} = (-\sqrt{3}, t, 0).$$

设平面 BCC_1 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{BC_1} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0 \\ -\sqrt{3}x + y + 2z = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$, 则 $y = \sqrt{3}$, $z = 0$,

所以 $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, 0)$.

设平面 BC_1P 的法向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{BP} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{BC_1} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} -\sqrt{3}a + b + 2c = 0 \\ -\sqrt{3}a + tb = 0 \end{cases}$, 令 $a = t$, 则 $b = \sqrt{3}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)$

所以 $\vec{n} = (t, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}(t-1))$,

则 $|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|t+3|}{2 \times \sqrt{t^2+3+\frac{3}{4}(t-1)^2}} = \frac{|t+3|}{\sqrt{7t^2-6t+15}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

整理得 $t^2-3t=0$, 解得 $t=0$ 或 $t=3$.

$\therefore$ 存在 P 点在 O 点或者 D 点时, 二面角 $C-BC_1-P$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 12 分

20. 解: (1) 由题可知 $\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 6\sqrt{5} \\ (a+c) + (a-c) = 6 \end{cases}$ 解得 $a=3, b=\sqrt{5}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 5 分

(2) 证明: 由题意, 直线 PQ 的斜率不为 0, 设直线 PQ 的方程为: $x = ty - 1$

则 $\begin{cases} x = ty - 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases}$ 消去 x 整理可得: $(5t^2+9)y^2 - 10ty - 40 = 0$

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ($y_1 > 0, y_2 < 0$), $M(x, y)$, 而 $A_1(-3, 0)$, $A_2(3, 0)$

则 $y_1 y_2 = \frac{-40}{5t^2+9}$, $y_1 + y_2 = \frac{10t}{5t^2+9}$, 即 $ty_1 y_2 = -4(y_1 + y_2)$,

由 A_2, P, M 三点共线得: $\frac{y}{x-3} = \frac{y_1}{x_1-3}$ 由 A_1, Q, M 三点共线得: $\frac{y}{x+3} = \frac{y_2}{x_2+3}$,

两式相除可得:

$\frac{x+3}{x-3} = \frac{y_1(x_2+3)}{y_2(x_1-3)} = \frac{y_1(ty_2+2)}{y_2(ty_1-4)} = \frac{ty_1 y_2 + 2y_1}{ty_1 y_2 - 4y_2} = \frac{-4(y_1 + y_2) + 2y_1}{-4(y_1 + y_2) - 4y_2} = \frac{-2(y_1 + 2y_2)}{-4(y_1 + 2y_2)} = \frac{1}{2}$,

解得 $x = -9$, 所以点 M 在定直线 $x = -9$ 上.

$\therefore S_{\triangle B_1 B_2 M} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 9 = 9\sqrt{5}$

$\therefore$ 三角形 $B_1 B_2 M$ 的面积为定值 $9\sqrt{5}$ 12 分

21. 解: (1) $x \in \mathbf{R}, f'(x) = e^x + a$

因为 $f(x)$ 是单调递增函数, $\therefore f'(x) = e^x + a \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

即 $a \geq -e^x$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

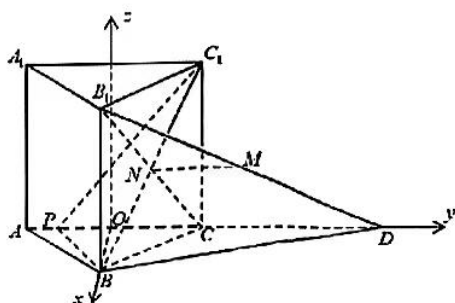
令 $h(x) = -e^x, x \in \mathbf{R}, h(x) \in (-\infty, 0)$,

$\therefore a \geq 0$

综上: $f(x)$ 是 $x \in \mathbf{R}$ 的单调递增函数, $a \geq 0$ 4 分

(2) 令 $F(x) = f(x) + \sin x = e^x + \sin x + ax + b, a, b \in \mathbf{R}$, 即求 $F(x) > 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

当 $a > 0$ 时, 存在较小得 x 使得: e^x 接近 0, ax 接近 $-\infty$, $\sin x \in [-1, 1]$, 从而 $F(x) > 0$ 不恒成立, 即



$f(x) + \sin x > 0$ 不恒成立.

当 $a = 0$ 时, $F(x) = e^x + \sin x + b \geq e^x + b - 1 > b - 1$,

当 $b \geq 1$ 时, $F(x) > 0$ 恒成立, 即 $f(x) + \sin x > 0$ 恒成立;

当 $b < 1$, 令 $x = (2k - \frac{1}{2})\pi$, $F[(2k - \frac{1}{2})\pi] = e^{(2k - \frac{1}{2})\pi} + b - 1$,

$\exists k \in \mathbb{Z}, k < \frac{1}{2}(\frac{\ln(1-b)}{\pi} + \frac{1}{2})$, 使 $F[(2k - 1)\pi] = e^{(2k - 1)\pi} + b - 1 < 0$,

此时: $a = 0, b \geq 1$ 时, $F(x) > 0$ 恒成立, 即 $f(x) + \sin x > 0$ 恒成立.

当 $a < 0$ 时, $F(x) = e^x + \sin x + ax + b \geq e^x + ax + b - 1$.

令 $g(x) = e^x + ax + b - 1$, 则 $g'(x) = e^x + a$, $g'(x)$ 有唯一零点 $x = \ln(-a)$, 显然也为 $g(x)$ 的最小值点,

即 $g(x)_{\min} = (-a) + a \ln(-a) + b - 1$, $f(x) > 0$ 恒成立当且仅当 $g(x)_{\min} > 0$,

即 $b > a - a \ln(-a) + 1$.

因为, $b \leq a - a \ln(-a) + 1$ 时,

令 $x = \ln(-a)$, $F[\ln(-a)] = (-a) + \sin(\ln(-a)) + a \ln(-a) + b \leq \sin(\ln(-a)) + 1$,

$\because a < 0$, 取 $\ln(-a) = -\frac{\pi}{2}$, $a = -e^{-\frac{\pi}{2}}$, 此时, $F[\ln(-a)] \leq 0$, $F(x) > 0$ 不恒成立,

即 $f(x) + \sin x > 0$ 不恒成立.

综上: $a = 0$ 且 $b \geq 1$ 时, $f(x) + \sin x > 0$ 恒成立;

$a < 0$ 且 $b > a - a \ln(-a) + 1$ 时, $f(x) + \sin x > 0$ 恒成立.....12 分

22. 解: (1) 由题意可得 C_1 的直角坐标方程为 $(x-3)^2 + y^2 = 9$,

其极坐标方程为 $\rho = 6\cos\theta$2 分

设 Q 点的极坐标为 (ρ, θ) , 则对应的 P 点的极坐标为 $(\rho, \theta - \frac{\pi}{2})$

又点 P 在 C_1 上, 所以 $\rho = 6\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = 6\sin\theta$

即 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 6\sin\theta$5 分

(2) 由题意知点 M 到射线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 的距离为 $d = 8\sin\frac{\pi}{6} = 4$,7 分

由 (1) 知 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 6\cos\theta$,

$|AB| = |\rho_B - \rho_A| = 6(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}) = 6(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}) = 3\sqrt{3} - 3$,9 分

所以 $S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = 6\sqrt{3} - 6$10 分

23. 解: (1) $f(x) = |2x+1| + 2|x-2| = |2x+1| + |2x-4| \geq |(2x+1) - (2x-4)| = 5$

当且仅当 $(2x+1)(2x-4) \leq 0$ 即 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 2 分

$f(x)_{\min} \geq |m-1| + |m+2|$ 即 $|m-1| + |m+2| \leq 5$

(1) 当 $m \leq -2$ 时, $1-m-m-2 \leq 5 \Rightarrow m \geq -3$ 所以 $-3 \leq m \leq -2$

(2) 当 $-2 < m < 1$ 时, $1-m+m+2 \leq 5 \Rightarrow 3 \leq 5$ 恒成立 所以 $-2 < m < 1$

(3) 当 $m \geq 1$ 时, $m-1+m+2 \leq 5 \Rightarrow m \leq 2$ 所以 $1 \leq m \leq 2$

综上: $-3 \leq m \leq 2$ 5 分

(1) 证明: 由 (1) 可知 $f(x)_{\min} = 5$, 所以 $n = 5$, $5a^2 + 3b^2 + 2c^2 = 10$

由柯西不等式可得: $[(\sqrt{5}a)^2 + (\sqrt{3}b)^2 + (\sqrt{2}c)^2](\sqrt{5}^2 + \sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2) \geq (5a + 3b + 2c)^2$

即 $10 \times 10 \geq (5a + 3b + 2c)^2$

所以: $|5a + 3b + 2c| \leq 10$ 当且仅当 $a = b = c = 1$ 时等号成立.....10 分